

§ 4. Application d'un raisonnement analogue aux problèmes aux valeurs propres

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 4. Application d'un raisonnement analogue aux problèmes aux valeurs propres

Comme exemple-type, je considère le problème de la vibration fondamentale d'une membrane couvrant un domaine G du plan et fixée sur le contour Γ : on cherche $u_1(x, y)$ et un nombre λ_1 tels que $\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = 0$ et $u_1 > 0$ dans G , et $u_1 = 0$ sur Γ . Le principe de Rayleigh dit:

$$\lambda_1 = \text{Min}_{v=0 \text{ sur } \Gamma} \left\{ \frac{D(v)}{\iint_G v^2 dA} \right\}.$$

On peut aussi l'énoncer ainsi:

$$(14) \quad \lambda_1 = \max k \text{ sous la condition: } \forall_{v=0 \text{ sur } \Gamma} D(v) - k \iint_G v^2 dA \geq 0.$$

Nous posons ici

$$\tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) \equiv f_x^2 + g_y^2 - k [\mu f^2 + (1 - \mu) g^2],$$

où $\mu(x, y)$ est une fonction arbitraire dans G ; la condition (6) est alors satisfaite. Nous avons maintenant, quelle que soit $\mu(x, y)$, $\lambda_1 \geq \max k$ sous la condition $\forall_{\substack{f, g \text{ satisfaisant (13)} \\ \text{avec } \chi(s) \equiv 0}} \iint_G \tilde{F} dA \geq 0$.

En effet, si l'on restreint f et g par $f \equiv g$, alors on retrouve pour k la condition (14); ici la classe des k admissibles a été restreinte, donc $\max k$ est devenu plus petit.

Maintenons fixes le nombre k et la fonction $\mu(x, y)$, et cherchons les paires $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ qui rendent stationnaire l'intégrale: nous avons les deux équations d'Euler

$$0 = -\frac{1}{2} [\tilde{F}]_f = \hat{f}_{xx} + k\mu\hat{f}; \quad 0 = -\frac{1}{2} [\tilde{F}]_g = \hat{g}_{yy} + k(1 - \mu)\hat{g}.$$

Supposons (c'est essentiel ici!) $\hat{f} > 0$ et $\hat{g} > 0$ dans G . Éliminons μ : les fonctions \hat{f} et \hat{g} satisfont

$$(15) \quad -\frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} - \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} = k = \text{const.}$$

Réciproquement, si nous avons choisi une paire de fonctions $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ satisfaisant (15) avec $k > 0$, posons $\mu(x, y) = -(1/k)(\hat{f}_{xx}/\hat{f})$; alors $1 - \mu = -(1/k)(\hat{g}_{yy}/\hat{g})$; les équations d'Euler relatives à μ sont alors satisfaites par \hat{f} et \hat{g} . Pour f et g ($= 0$ sur Γ) quelconques, nous vérifions

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \iint_G \tilde{F}(x, y, f, g, f_x, g_y) dA &= \iint_G \left[f_x^2 + g_y^2 + \frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} f^2 + \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} g^2 \right] dA \\ &= \iint_G \left[\left(f_x - \frac{\hat{f}_x}{\hat{f}} f \right)^2 + \left(g_y - \frac{\hat{g}_y}{\hat{g}} g \right)^2 \right] dA \geq 0, \end{aligned} \right.$$

donc $\lambda_1 \geq k$; on a l'égalité en choisissant $\hat{f} = \hat{g} = u_1(x, y)$, d'où

$$(17) \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\substack{\{\hat{f}, \hat{g} > 0 \text{ dans } G \text{ satisfaisant} \\ (15) \text{ et } (13) \text{ avec } \chi(s) \equiv 0}} \left(-\frac{\hat{f}_{xx}}{\hat{f}} - \frac{\hat{g}_{yy}}{\hat{g}} \right).$$

C'est une spécialisation du principe de Maximum plus général [7]:

$$(18) \quad \lambda_1 = \text{Max}_{\substack{\{f, g > 0 \text{ dans } G \\ f_{xx} \text{ et } g_{yy} \text{ existent}}} \inf_G \left(-\frac{f_{xx}}{f} - \frac{g_{yy}}{g} \right);$$

mais les paires de fonctions plus particulières $\{\hat{f}, \hat{g}\}$ sont « les meilleures ».

§ 5. La transformation de Friedrichs conduit à une autre forme du même principe

Considérons de nouveau le principe de Rayleigh sous la forme (14); remarquons que la fonction propre $u_1(x, y)$ n'est déterminée qu'à un facteur constant près, il en est donc de même de $\text{grad } u_1$; tandis que le champ vectoriel $\text{grad } u_1/u_1$ est uniquement déterminé. C'est pourquoi, opérant presque comme Friedrichs (cf. 1.2), nous remplaçons $-\text{grad } v/v$ par \vec{q} , c'est-à-dire $-\text{grad } v$ par $v\vec{q}$ dans (14). $\lambda_1 \geq \max k$ sous la condition

$$\underset{v=0 \text{ sur } \Gamma}{\text{Min}}_{\vec{q}} \iint_G [v^2 \vec{q}^2 - kv^2 - 2v\vec{p} \cdot (\text{grad } v + v\vec{q})] dA \geq 0,$$