§ 1. Introduction

UNE TRANSFORMATION VARIATIONNELLE APPARENTÉE A CELLE DE FRIEDRICHS, CONDUISANT A LA MÉTHODE DES PROBLÈMES AUXILIAIRES UNIDIMENSIONNELS

par Joseph Hersch

§ 1. Introduction

1.1. K. O. Friedrichs ([5]; voir aussi [2], pp. 201-9) a découvert en 1929 une transformation variationnelle involutive, faisant passer d'un principe de Minimum caractérisant une grandeur d à un principe de Maximum « dual », caractérisant *la même* grandeur d. — L'intérêt numérique de cette double caractérisation est évident: si (comme c'est généralement le cas) la grandeur d ne peut être déterminée exactement, le premier principe permettra de l'évaluer par excès, le second de l'évaluer par défaut. — L'intérêt théorique est considérable: il réside surtout dans la dualité elle-même; mais aussi dans le fait que, appliquée à un problème aux limites, la transformation de Friedrichs fait passer du principe de Dirichlet au principe de Thomson (à propos de ces principes: cf. [13, 3]). — L'idée de base est très simple: si, dans un principe de Minimum, on élargit la classe des fonctions admises à concurrence, le Minimum diminue (ou reste inchangé).

1.2. Les raisonnements qui suivent s'appliquent à un nombre fini quelconque de dimensions; pour fixer les idées, nous considérons un domaine régulier G du plan, de contour Γ, et, dans G, un problème de variation initial (I) du type:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} d = \mathrm{Min}_v \iint\limits_G F(\vec{x}, v, \operatorname{grad} v)\, dA\,, \\ \text{sous la condition: } v = \chi(s) \text{ donnée sur } \Gamma\,; \end{cases}$$

$\vec{x}$ désigne le rayon vecteur (x, y), $dA = dxdy$ est l'élément d'aire, s mesure l'arc sur la courbe Γ.

La transformation de Friedrichs consiste à « dissocier » v de grad v dans l'intégrale ci-dessus: on y remplace grad v par un champ vectoriel $\vec{q}$ (alors on a $F(\vec{x}, v, \vec{q})$), et l'on traite les conditions auxiliaires $\vec{q}$ — grad $v = \vec{0}$ dans G et $v - \chi(s) = 0$ sur Γ à l'aide de multiplicateurs de Lagrange $\vec{p}(\vec{x})$ et $\mu(s)$ respectivement; v et $\vec{q}$ varient désormais indépendamment. On obtient ainsi un « problème libre »; on passe ensuite de celui-ci au « problème dual » (D) en *imposant à priori* les conditions naturelles suivantes du problème libre:

(1) $F_{\vec{q}} = \vec{p}$ (c'est-à-dire: $F_{q_i} = p_i$), et $F_v = \operatorname{div}\vec{p}$ dans G;

(2) $\vec{p}\cdot\vec{n} = \mu(s)$ sur Γ ($\vec{n}$ = normale extérieure).

On postule en général que, à l'aide des conditions (1), on puisse tirer v et $\vec{q}$ en fonction de $\vec{x}$, $\vec{p}$ et div $\vec{p}$. On pose alors (transformation de Legendre)

$$\Psi(x, \vec{p}, \operatorname{div}\vec{p}) = \vec{q}\cdot\vec{p} + v\operatorname{div}\vec{p} - F(\vec{x}, v, \vec{q}) \tag{3}$$

et l'on obtient le problème dual:

$$(\mathrm{D})\quad \begin{cases} d = \mathrm{Max}_{\vec{p}}\left\{-\iint\limits_G \Psi(\vec{x}, \vec{p}, \operatorname{div}\vec{p})\,dA + \oint\limits_\Gamma \chi(s)\,\vec{p}\cdot\vec{n}\,ds\right\} \\ \text{sous la condition } \operatorname{div}\vec{p} = F_v\,. \end{cases}$$

1.3. Considérons un problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson: $\Delta u = -\rho(\vec{x})$ dans G, $u = \chi(s)$ sur Γ (ρ et χ = fonctions données); posons

$$d = \oint\limits_\Gamma \chi(s)\frac{\partial u}{\partial n}\,ds - \frac{1}{2}D(u) = +\frac{1}{2}D(u) - \iint\limits_G \rho u\,dA\,,$$

où $D(u)$ est l'intégrale de Dirichlet $\iint\limits_G \operatorname{grad}^2 u\,dA$; le principe de Dirichlet nous dit:

$$d = \mathrm{Min}_{v=\chi(s)\text{ sur }\Gamma}\left\{\frac{1}{2}D(v) - \iint\limits_G \rho v\,dA\right\}. \tag{4}$$

On a donc ici

$$F(\vec{x}, v, \vec{q}) = \frac{1}{2}\vec{q}^{\,2} - \rho v\,;\quad \vec{p} = F_{\vec{q}} = \vec{q}\,;\quad \operatorname{div}\vec{p} = F_v = -\rho\,;$$

$$\Psi(\vec{x}, \vec{p}, \operatorname{div} \vec{p}) = \vec{q} \cdot \vec{p} + v \operatorname{div} \vec{p} - F = \frac{1}{2} \vec{p}^{\,2} ;$$

d'où le principe dual:

$$(5) \qquad d = \operatorname{Max}_{\operatorname{div} \vec{p} = -\rho} \left\{ \oint_{\Gamma} \chi(s) \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds - \frac{1}{2} \iint_{G} \vec{p}^{\,2} \, dA \right\},$$

qui n'est autre que le principe de Thomson (cf. [13]); le champ extrémal est $\vec{p} = \operatorname{grad} u$. Les champs vectoriels $\vec{p}$ concurrents satisfont l'équation différentielle, mais aucune condition aux limites.

1.4. Nous considérerons au § 2 une transformation variationnelle analogue (mais non involutive), reposant non plus sur une dissociation de v et grad v, mais bien sur une dissociation de la fonction v elle-même en *deux* fonctions f et g (le domaine G étant à *deux* dimensions). Au § 3, nous appliquerons cette transformation au problème considéré en 1.3 ci-dessus: elle fait correspondre au principe de Dirichlet un principe très voisin de celui de Thomson, mais restreignant les champs concurrents par des conditions aux limites; ce principe a été obtenu par la « méthode des problèmes auxiliaires unidimensionnels » [8, 7]. Au § 4, nous montrerons comment cette méthode s'applique également aux problèmes aux valeurs propres, et conduit, à partir du principe de Rayleigh, à un principe de Maximum pour λ_1 (la première valeur propre) déjà obtenu à l'aide de problèmes auxiliaires unidimensionnels [6, 7], inspirés par Payne-Weinberger [11]. Enfin, nous montrerons au § 5 qu'une forme essentiellement équivalente de ce principe de Maximum (mais plus proche du principe de Thomson), se rattachant à divers travaux dont quelques-uns déjà anciens [12, 1, 14, 15, 10, 7, 9, 4], peut être également obtenue en appliquant une transformation de Friedrichs à peine modifiée.

§ 2. La transformation variationnelle proposée

2.1. Nous partons de nouveau du problème (I) considéré en 1.2:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} d = \operatorname{Min}_v J[v] \text{ sous la condition } v = \chi(s) \text{ sur } \Gamma , \\ \text{où } J[v] = \iint_G F(x, y, v, v_x, v_y) \, dA . \ \textit{Nous supposons } F_{v_x v_y} = 0. \end{cases}$$