

## II. Physique mathématique

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## II. *Physique mathématique*

Sans aucun doute, les activités exercées par Borel pendant la première guerre, — activités qui l'ont amené à étudier des problèmes concrets — ont conduit Borel à s'intéresser de plus en plus à la Physique. Mais cet intérêt s'était déjà manifesté auparavant et pour des raisons toutes différentes.

Dès 1906, Borel s'occupe de la théorie cinétique des gaz et de la loi de Maxwell correspondante, après avoir constaté combien sont insuffisantes les diverses démonstrations de cette loi. Pour y apporter la rigueur [96], il prépare le lecteur en étudiant d'abord la répartition des petites planètes et montrant la nécessité de donner un sens aux positions antérieures du problème. Dans le cas des gaz, la discussion est un peu plus compliquée, mais elle l'amène encore à rejeter les formes du problème antérieurement admises et à leur substituer un problème qui, après une réduction que nous allons expliquer, prend la forme  $G$  énoncée plus loin.

On part d'hypothèses précises sur les molécules du gaz, qui conduisent à ramener l'étude du gaz à celui du mouvement de  $n$  sphères égales se mouvant dans un certain domaine où elles peuvent se réfléchir à la suite d'un choc, soit sur les parois, soit entre deux d'entre elles. Borel ramène le mouvement des  $n$  centres des  $n$  sphères dans l'espace usuel à 3 dimensions au cas du mouvement d'un point  $P$  dans un domaine  $D$  de l'espace à  $3n$  dimensions, où les lois de la réflexion sur les parois sont analogues aux lois classiques. En vertu de la conservation de l'énergie, la vitesse de  $P$  est constante. Soit  $\overline{OV}$  le vecteur d'origine fixe  $O$ , équipollent à cette vitesse.  $V$  se déplace sur une sphère  $S$ . Borel énonce alors ainsi la forme finale,  $G$ , qu'il donne au problème.

Il admet que la position de la paroi et les données initiales sont des éléments aléatoires dont les lois de probabilité sont connues. Le problème est de déterminer la probabilité que le point  $V$  soit dans un domaine élémentaire  $d\omega$  de la surface de  $S$  à une époque  $t$  comprise entre des limites connues, que l'on fera ensuite croître indéfiniment.

Borel démontre alors que la probabilité limite cherchée est proportionnelle à  $d\omega$ , c'est-à-dire que toutes les directions de  $OV$  sont également probables (pour un temps suffisamment long).

En précisant le calcul, Borel retrouve enfin la loi de Maxwell. D'après lui, ce calcul fournit la plus simple des démonstrations rigoureuses de cette loi.

Dans sa conférence au Rice Institute [S., p. 317], Borel étudie plusieurs aspects du passage du fini à l'infini en mathématique et observe le parallélisme avec le problème de savoir si la Nature est discontinue ou continue, ce qui entraîne la question de la légitimité en Physique des théories moléculaires.

Borel note d'abord que c'est souvent « une simplification en Mathématiques que de remplacer par l'infini un nombre fini très grand ». Il en cite plusieurs exemples. Limitons-nous au premier qui conduit à constater « que le calcul des intégrales définies est souvent plus simple que celui des formules sommatoires ». Mais il étudie aussi le passage inverse de l'infini au fini, qui correspond en physique à l'introduction des théories moléculaires. Il observe alors que « les considérations basées sur l'existence des molécules n'y jouent qu'un rôle auxiliaire ».

« La théorie moléculaire a donc été un guide précieux pour l'analyste en lui suggérant la marche à suivre pour étudier les équations du problème, mais elle est éliminée de la solution définitive ».

On pourrait encore préciser ces réflexions. Il est exact que, pendant longtemps, les mathématiciens ont abordé les problèmes où figuraient des variables continues en remplaçant celles-ci par des variables discontinues et passant à la limite. Comme le dit Borel, cette façon de procéder permettait de pressentir la forme de la solution. Mais pour établir celle-ci, il fallait établir l'existence et la forme d'une limite et c'était là souvent un problème très difficile. Depuis lors, la tendance s'est faite jour, de plus en plus, d'éviter cette difficulté en cherchant à préciser dans la discussion du cas discontinu tout ce qui gardait un sens, que le nombre des valeurs des variables soit fini ou non. On arrive ainsi à une solution s'appliquant directement au problème posé dans le cas continu. C'est ainsi que l'étude des équations intégrales symétriques faite par Hilbert en résolvant le problème difficile

d'un passage à la limite s'est révélée à la fois plus simple et plus élégante dans l'étude directe de E. Schmidt. Un exemple analogue est fourni par la démonstration de Fredholm de l'existence d'une solution de son équation intégrale. Sa marche est analogue à celle de la solution d'un système de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues; mais si elle s'est trouvée ainsi guidée par l'étude de ce problème, à aucun moment sa démonstration ne fait intervenir le passage à la limite du cas d'un nombre fini de variables à un nombre infini.

Borel revient au cas discontinu en observant qu'il « peut être intéressant de se proposer, au point de vue purement mathématique, l'étude directe de fonctions ou d'équations dépendant d'un nombre fini de variables, mais très grand ». Il se trouve alors ramené à une question qui lui tient à cœur et qu'il a souvent agitée sous différentes formes:

« La première difficulté qui se présente lorsqu'on veut étudier des fonctions d'un très grand nombre de variables, est la définition précise d'une telle fonction, j'entends par là une définition *individuelle*, permettant de distinguer la fonction définie de l'infinité des fonctions analogues ». Borel se demande « si l'on peut considérer comme donné » un ensemble de nombres dont « la vie d'un homme ne suffirait à en énumérer une faible partie ». Pour lui, un tel ensemble peut être considéré comme déterminé « par la connaissance d'une formule assez simple pour être effectivement écarté, tandis qu'il n'est pas possible d'écrire effectivement autant de nombres distincts... ». Il peut être aussi déterminé en considérant l'ensemble comme l'ensemble des valeurs que peut prendre un nombre aléatoire dont la loi de probabilité est donnée.

Ces considérations sont tout à fait justifiées quand il s'agit de définitions et d'applications « constructives ». S'il s'agit de définitions et d'applications « descriptives », la situation est différente. La démonstration, par exemple, que le terme général d'une série convergente tend vers zéro quand son rang croît indéfiniment, nous paraît correcte sans que ce terme général soit représenté par une formule simple ou qu'il relève du calcul des probabilités et même si la vie d'un homme ne suffisait pas à énumérer une faible partie de la suite des termes de la série.

Cette observation n'enlève rien à l'intérêt de la distinction que fait Borel des ellipsoïdes « très irréguliers » parmi les ellipsoïdes dans un espace à un très grand nombre de dimensions. Borel appelle ainsi ceux pour lesquels la moyenne des inverses des quatrièmes puissances des longueurs des axes n'est pas du même ordre de grandeur que le carré de la moyenne des inverses des carrés des longueurs des axes. D'après Borel, il convient, pour obtenir des résultats utiles sur les ellipsoïdes, d'exclure ces ellipsoïdes très irréguliers. « Lorsqu'un ellipsoïde n'est pas très irrégulier, plusieurs de ses propriétés permettent de l'assimiler à une sphère ». . .

« Une figure qui dépend d'un nombre extrêmement grand de paramètres ne peut être considérée comme numériquement déterminée que si ses paramètres sont définis au moyen de données numériques assez peu nombreuses pour nous être accessibles ».

Plus loin, Borel développe les raisons pour lesquelles il convient souvent de remplacer une variable ayant un nombre de valeurs fini mais très grand par une variable ayant une suite infinie mais énumérable de valeurs. Et ceci, plutôt que par une variable continue comme on faisait en physique mathématique classique où l'on supposait la matière continue.

Une autre des suggestions mathématiques qu'offrent les théories moléculaires concerne les fonctions d'une variable complexe. Pour le montrer, Borel considère le potentiel d'un système formé d'une suite infinie de points isolés, la masse concentrée en chacun de ces points étant finie ainsi que la masse totale. Pour simplifier, limitons-nous au cas d'un système plan et, par suite, d'un potentiel dit logarithmique. Supposons, de plus, que les masses sont réparties en un ensemble de points qui, dans une certaine région, est partout dense. Mais « l'hypothèse que les masses attirantes sont de simples points matériels sans dimension est difficile à accepter au point de vue physique. On est ainsi conduit à disperser cette masse dans un petit cercle ayant le point pour centre sans changer le potentiel à l'extérieur de ce cercle qu'on nommera le cercle d'action de son centre. On répartit les masses et les densités de telle manière que la densité s'annule ainsi que ses dérivées sur le périmètre du cercle; elle est ainsi non seulement finie mais continue ».

Borel démontre que, par une répartition convenable de la densité, on arrive à un résultat qui peut étonner. On aurait pu craindre qu'il n'y eût pas de place libre entre des points matériels tellement serrés par hypothèse. En fait, Borel démontre « qu'il y a des points en lesquels se croisent une infinité de droites sur lesquelles la densité est nulle; en ces points, la fonction potentielle logarithmique satisfait à l'équation de Laplace ».

Borel passe alors à la situation correspondante dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. Soit une fonction à pôles denses dans une région; on peut définir dans cette région « une infinité de droites, se croisant dans tous les sens, la fonction admettant des dérivées continues sur ces droites et la dérivée ayant la même valeur dans toutes les directions en chacun des points de croisement de ces droites. Nous retombons ainsi sur la théorie des fonctions monogènes résumée plus haut (p. 69), mais reliée ici à une théorie physique moléculaire. C'est une extension magnifique de la théorie des fonctions analytiques grâce à laquelle Borel a pu dépasser l'extension précédente due à Weierstrass.

A la fin du même mémoire, Borel survolant son sujet, s'exprime ainsi: « C'est toujours au contact de la Nature que l'Analyse mathématique s'est renouvelée, ce n'est que grâce à ce contact permanent qu'elle a pu échapper au danger de devenir un pur symbolisme, tournant en rond sur lui-même ». On ne saurait mieux dire, pourvu qu'on complète cette assertion. Les mathématiciens sont, en effet, nécessairement amenés à réaliser un travail interne, consistant en une refonte continue de l'armature des mathématiques, pour les simplifier et les harmoniser. Il y a une tendance vers l'abstraction qui semble éloigner les mathématiques de la Nature, mais qui, en réalité, n'a pour but que de dégager l'essentiel et le commun dans les problèmes, généralement particuliers, posés par la Nature et ainsi de rendre leurs solutions applicables à de nouveaux problèmes posés par la Nature.

### *L'irréversibilité.*

Depuis Loschmidt en 1876, on fait souvent la remarque suivante: les équations de la dynamique ne sont pas modifiées

quand on change les signes des vitesses, ce qui revient à changer le signe du temps. Ces équations ne permettent donc pas de prévoir dans l'avenir une évolution différente de ce que serait l'évolution en remontant vers le passé. Dès lors, il semble en résulter que les phénomènes irréversibles sont impossibles. Borel a donné [S., p. 341] une explication de ce paradoxe.

Il admet que cette objection serait valable, si toutes les conditions initiales étaient données avec une exactitude absolue. Mais cette hypothèse lui paraît irréalisable. Cette exactitude absolue devra laisser place à un certain flottement. Il en résulte que l'avenir n'est pas entièrement déterminé, alors qu'on ne peut parler d'une indétermination du passé. Il n'y a donc plus une réversibilité absolue. Dans certains cas, on aura des phénomènes presque réversibles, dans d'autres ils seront irréversibles.