

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1965)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL
Autor: Fréchet, Maurice
Kapitel: Eléments calculables ou effectivement définis
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39967>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

partiel en vue de simples commodités non absolument nécessaires.

D'ailleurs, Borel lui-même laisse entrevoir ce second aspect de l'élaboration mathématique, *à la fin* du passage suivant :

Je pense que ce court exposé de mes plus récents travaux de Calcul des Probabilités et de Physique mathématique aura mis en évidence l'esprit qui s'en dégage et qui apparaîtrait nettement à leur lecture : ne considérer jamais la science mathématique que comme l'auxiliaire de la physique ; faciliter la discussion des théories émises par les physiciens, mais n'empiéter jamais sur le domaine réservé à l'expérience, qui doit toujours décider en dernier ressort. C'est seulement en simplifiant l'exposition mathématique et la dégageant d'un appareil parfois superflu et inutilement encombrant que l'on facilitera la confrontation avec l'expérience, de théories qui sont souvent difficilement accessibles à un trop grand nombre de chercheurs de laboratoire.

Après avoir ainsi défini le but de la mathématique, Borel met en opposition la recherche des difficultés et celle de la simplicité.

C'est grâce à l'étude des théories physiques que l'on peut éviter certains des défauts que risque d'entraîner avec elle une tendance trop grande à l'abstraction ¹⁾ ; la joie intellectuelle que l'on a à vaincre un obstacle jusque-là insurmonté donne, en effet, la tentation de rechercher les difficultés pour le seul plaisir de les vaincre ; je crois avoir donné assez d'exemples de solutions difficiles, parfois vainement cherchées auparavant, pour pouvoir dire qu'à mon sens, ce n'est pas cette recherche de la difficulté qui est le but le plus élevé de la science mathématique, mais bien plutôt la simplicité des résultats et des méthodes ²⁾.

ÉLÉMENTS CALCULABLES OU EFFECTIVEMENT DÉFINIS

De plus en plus, dans les mathématiques modernes, on met en opposition les définitions constructives et les définitions descrip-

¹⁾ Il est pourtant certain que la tendance actuelle des mathématiciens est d'aller toujours vers une plus grande abstraction. Elle n'offre de danger que si — comme malheureusement cela arrive — elle élimine l'intuition et n'a d'autre but qu'elle-même. Ce sont là quelques-uns des défauts visés par Borel.

²⁾ M. Paul Lévy pourrait témoigner combien souvent dans nos conversations privées — qui m'ont si souvent été utiles — j'ai souligné la même thèse. J'y ajoutais qu'une chose m'enchantait particulièrement, c'est la solution simple d'un problème, *important en soi, mais qu'on n'avait pas songé à poser.*

tives. Dans les premières, on indique comment former, comment construire l'élément: nombre, figure, fonction, que l'on veut définir. Dans les secondes, on n'essaie pas de déterminer complètement les éléments que l'on considère, on se contente de supposer qu'ils vérifient certaines conditions.

Les dernières définitions ont le grand avantage de simplifier souvent les raisonnements et généralement de leur donner une portée plus générale.

Les premières sont indispensables pour passer de la théorie aux applications et même elles permettent, auparavant, de s'assurer de l'existence et, éventuellement, de l'unicité de l'élément à définir.

Borel préférerait ces définitions constructives et il a beaucoup contribué à leur étude générale en utilisant et précisant les notions « d'éléments calculables » et « d'éléments effectivement définis ». C'est le sujet des citations suivantes :

J'espère avoir montré que le point de vue que j'ai adopté et qui consiste, en somme, à considérer que, pour les fonctions comme pour les êtres vivants, les *réalisés* sont autrement intéressants que les *possibles*, a été fécond en résultats. Ce point de vue était celui d'Hermite, qui le qualifiait de *réaliste*: pour lui, l'observation des faits analytiques était la source la plus féconde des découvertes mathématiques; dans un de ses derniers écrits, M. Poincaré a fait observer avec beaucoup de finesse et quelque subtilité, qu'on pourrait aussi bien qualifier d'*idéaliste*, ce point de vue pragmatique, car les êtres mathématiques que nous étudions ne sont réels pour nous que parce qu'ils ont été pensés par nous; leur réalité vient donc de notre esprit. Mais la démonstration importe peu...

On est ainsi conduit... à prendre une position en quelque sorte intermédiaire entre les géomètres disposés à ne considérer que les « bonnes » fonctions et ceux qui auraient pu être tentés de croire que ces « bonnes » fonctions ne sont qu'un cas extrêmement particulier des fonctions « générales ». Nous savons d'une manière précise que ni les uns, ni les autres n'ont tout à fait tort; au point de vue abstrait de Dirichlet ou de Riemann, les fonctions totalement discontinues sont, en effet, les plus générales; il n'en est pas de même si l'on se borne aux fonctions que l'on peut effectivement définir (même si l'on prend le mot *définir* dans le sens le plus large possible).

Borel dit ailleurs :

Si des fonctions qui peuvent être définies analytiquement « sont compliquées » (discontinues), elles ne sont, en général, pas *calculables*,

c'est-à-dire que la connaissance numérique approchée de la variable n'entraîne pas la connaissance numérique approchée de la fonction: le fait d'être calculable est, semble-t-il, la condition indispensable pour qu'une fonction puisse être utilisée dans les applications.

Au point de vue abstrait, si l'on admet que toute théorie humaine doit s'exprimer, en dernière analyse, au moyen d'un nombre fini relativement petit de données, il semble difficile de nier la possibilité de constituer entièrement la théorie sans faire intervenir d'hypothèses impliquant l'existence d'éléments dont le nombre dépasse ce que l'imagination de l'homme peut concevoir.

... Il est clair que tous les éléments analytiques, nombres ou fonctions, qui peuvent être effectivement définis, sont en infinité dénombrable... Par *effectivement définis*, on doit entendre: *définis au moyen d'un nombre fini de mots*, et il est clair que les éléments pour lesquels le nombre de mots nécessaires à la définition est extrêmement grand devront être regardés comme ayant une probabilité extrêmement petite.

Il est clair que l'idéal de Borel serait que dans toute démonstration, dans toute définition n'intervienne (explicitement ou implicitement) qu'un nombre fini de mots.

Mais c'est un idéal lointain et Borel reconnaît l'avantage *actuel* de la notion de l'infini; comme le montre le passage suivant:

C'est fréquemment une simplification en mathématiques que de remplacer par l'infini un nombre fini très grand. C'est ainsi que le calcul des intégrales définies est souvent plus simple que celui des formules sommatoires et que le calcul des dérivées est généralement plus simple que celui des différences finies. De même, on a été conduit à remplacer l'étude simultanée d'un très grand nombre de fonctions d'une variable par l'étude d'une infinité continue de fonctions d'une variable, c'est-à-dire d'une fonction de deux variables. Par une généralisation plus hardie, M. Vito Volterra a été conduit à définir des fonctions qui dépendent d'autres fonctions, c'est-à-dire, dans le cas le plus simple, des fonctions de ligne, en les considérant comme des cas limites de fonctions qui dépendraient d'un très grand nombre de variables ou si l'on veut, d'un très grand nombre de points de la ligne.

Les mathématiques n'ont pu se constituer qu'en schématisant, en idéalisant les réalités concrètes dont elles sont parties, tel est le cas pour la notion de l'infini.

Borel donne dans le passage précédent, des exemples intéressants des simplifications ainsi apportées. Mais on pourrait en

donner de beaucoup plus élémentaires. Soit, par exemple, la somme $a + b$ de deux nombres entiers a et b . Si nous admettons que les nombres qui nous sont concrètement accessibles restent tous au-dessous d'une certaine limite N , la somme $a + b$, non seulement ne pourra pratiquement avoir de sens que si a et b sont inférieurs à N , mais même il faudra supposer que $a + b$ soit lui-même inférieur à N . Dans tout raisonnement où intervient une somme $a + b$, a et b devront être soumis à cette limitation. Comme le dit Borel (voir pp. 29 et 37), on peut concevoir la possibilité de construire une théorie soumise à de telles restrictions)¹. Mais que de complications ! Les raisonnements les plus simples deviendraient inextricables.

Dans le même passage de Borel, il est rappelé que Volterra a fréquemment insisté sur l'intérêt qu'il y a, pour généraliser, à passer à la limite du fini à l'infini.

Nous croyons utile, ici, de faire, une fois de plus, une distinction. Ce passage est en effet extrêmement utile quand il s'agit de raisonnements intuitifs, qui permettent, par analogie, de prévoir un résultat dans le cas infini, d'après sa forme dans le cas fini.

Mais, quand il faut passer à des démonstrations rigoureuses, on se heurte souvent à d'énormes difficultés.

Dans ce cas, l'expérience a souvent prouvé qu'il valait mieux procéder autrement. Chercher dans le cas fini à distinguer tout ce qui, dans les raisonnements connus, ne fait pas *effectivement* intervenir l'hypothèse du fini... Et constituer ainsi une théorie plus générale, ou obtenir des théorèmes plus généraux.

BOREL INITIATEUR

La description des tendances générales de l'œuvre de Borel qui résulte des appréciations de ses commentateurs et de lui-même, n'est cependant pas complète.

Nous avons dit ailleurs au sujet d'une des idées dues à Borel qu'il était *un initiateur*. Mais il l'a été aussi en introduisant d'autres notions.

¹) Robin avait publié un ouvrage dans ce sens.