

DEUXIÈME PARTIE LES TENDANCES GÉNÉRALES DE L'ŒUVRE SCIENTIFIQUE D'ÉMILE BOREL

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

DEUXIÈME PARTIE

LES TENDANCES GÉNÉRALES DE L'ŒUVRE SCIENTIFIQUE D'ÉMILE BOREL ¹

Nous commencerons par des généralités d'ordre philosophique, en essayant de dégager les tendances générales des travaux d'Emile Borel.

Dans toute cette partie, où nous ferons beaucoup de citations de Borel ou de ses commentateurs, nous nous efforcerons de grouper, à chaque fois, ces citations autour d'une idée centrale, sans nous soucier de leur ordre chronologique ou typographique. Les citations de Borel seront imprimées en petits caractères.

Disons d'abord que Borel a exercé son esprit inventif sur toutes les Mathématiques pures (Arithmétique, Algèbre, Analyse, Géométrie, Calcul des probabilités), et sur beaucoup de leurs applications, entre autres: Mécanique, Physique mathématique, Statistique, Econométrie. Il s'est aussi prononcé souvent sur plusieurs points relevant de la Philosophie des sciences et de la Pédagogie. Dans tous ces domaines, ses « travaux abondent », dit feu Carleman, « en idées originales et fécondes ».

Son influence sur le progrès des sciences ne s'est pas exercée seulement par ses découvertes, mais aussi par son enseignement, par ses livres et par les contacts personnels stimulants qu'il a eu avec ses confrères, ses collègues (Français et étrangers), et surtout avec les jeunes, en particulier, pendant les années 1910-1920, où il a exercé les fonctions de sous-directeur de l'Ecole normale supérieure.

MODE D'EXPOSITION

Le mode d'exposition de Borel dans ses cours ou ses publications se distingue nettement de ceux de nombreux mathématiciens.

¹) Paru dans la *Revue Philosophique*, tome CLI, 1961, p. 397-416.

A tel point, que ce fait a frappé indépendamment trois des orateurs qui ont parlé au jubilé de Borel (un mathématicien, M. Ville; un physicien, feu Bruhat; un homme politique, feu Delbos). Ils le font ressortir en termes différents mais qui se renforcent par leur concordance dans le fond des idées. Nous en citerons quelques phrases, en prenant la liberté d'entremêler les citations pour juxtaposer les considérations de même nature.

Pour commencer, un tableau des méthodes courantes :

« Vous savez combien les leçons de mathématiques spéciales sont précautionneuses... Pour [garder les élèves] de l'erreur, [ils sont] instruits avec une discipline prudente mais un peu étroite. » ... « L'élève a l'impression d'avancer entre deux barrières, qui sont des garde-fous comme on le découvre par la suite. »

Même passant du lycée à l'Université, beaucoup d'exposés « donnent bien l'idée de la parfaite clarté des mathématiques, mais d'une clarté qui était obtenue parce que tout était éclairé jusqu'au dernier détail, de sorte que, suivant le principe bien connu des éclairagistes, les reliefs et les obstacles disparaissent ». — Et d'autre part, « aussitôt un résultat trouvé, les nécessités de l'exposition font [souvent] que les idées s'intervertissent, se mettent dans un ordre nouveau, plus logique, plus clair, plus élégant », mais « ce qui est gagné en esthétique est quelquefois perdu en force ». ... « De plus, on risque de fermer aux autres la voie par où l'on est passé soi-même. » ... « Ceux qui se sont entretenus avec des mathématiciens ont remarqué parfois la différence entre la manière dont ils s'expriment dans les livres ou les cours et celle dont ils développent leurs idées dans une conversation privée »..., il leur « faut recourir à des raisonnements plus vivants, plus intuitifs ».

« Pour pouvoir manipuler [les êtres mathématiques] sans s'astreindre à en connaître toutes les propriétés, il est nécessaire de parvenir à en avoir une notion intuitive, à se familiariser avec leur physionomie... » « [Leurs] propriétés essentielles ne sont pas forcément celles, en nombre minimum, d'où toutes les autres se déduisent logiquement. Ce sont plutôt celles qui suggèrent à l'esprit les considérations qui, par une voie naturelle, permettent de compléter l'esquisse faite sommairement mais d'une manière expressive. Cette connaissance génératrice d'intuitions, une

simple suite de définitions, théorèmes et démonstrations ne la donne qu'indirectement; une telle succession offre plutôt le spectacle d'une lutte pied à pied entre l'auteur qui affirme et le lecteur qui doute, ce dernier obligé de reculer pas à pas et, poussé dans son dernier retranchement, forcé de capituler.»

Vient maintenant la description de la méthode didactique, toute différente, d'Emile Borel. « Dans ses conférences, au contraire, comme dans ses travaux, c'est à ce qui est réellement fondamental qu'il s'attachait; il savait faire comprendre quels étaient les caractères essentiels des théories qu'il exposait, il savait faire admettre qu'il ne fallait pas se perdre dans des démonstrations accessoires, » Et d'autre part, « dans les ouvrages et aussi dans l'enseignement oral de M. Borel, nous avons reconnu la méthode d'exposition des grands mathématiciens français dont il continue la tradition... Souffrir sans dommage d'être exposée comme elle a été conçue, voilà un trait de la pensée d'un grand savant; Emile Borel nous en a fourni un exemple parfait ».

Un homme politique, feu Delbos, a su, à son tour, célébrer l'excellence didactique de Borel:

« Cette tendance, on l'aperçoit jusque dans ses œuvres les plus abstraites, on la reconnaît à cette lucidité qui éclaire le cœur même des problèmes, à sa façon de les réduire à l'essentiel, à cet équilibre souverain qui caractérise ses solutions et leur donne une valeur largement humaine... » Dans son ouvrage *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, « apparaît, dans toute sa plénitude, cette union de l'intelligence et du bon sens qui règne sur toute son œuvre, cette force tranquille et cette simplicité qui sont les fruits de longues réflexions ».

BASES CONCRÈTES DES MATHÉMATIQUES

Le même commentateur a discerné la direction que Borel assignait aux Mathématiques. Dans ses œuvres, il voit « une tendance irrésistible et croissante vers le réel, vers le concret, une poussée intérieure qui a orienté Emile Borel vers la Physique mathématique, vers la Théorie des probabilités qui l'ont con-

duit dans un domaine où j'ai eu la joie de l'apprécier avec une moins grande incompétence, celui de l'action civique et politique ».

Un autre commentateur précise ainsi cette tendance: « Les Mathématiques doivent avoir une base solide dans la nature concrète et dans la nature humaine: elles idéalisent des choses sensibles ou des faits psychologiques. Borel a toujours insisté sur la nécessité de ne pas perdre de vue le réel: vous savez combien il était attaché aux notions de constructivité, d'êtres accessibles au calcul; il ne refusait pas de s'intéresser à des notions qui perdent le contact avec le concret, mais exigeait qu'il en soit fait expressément mention... » « Il savait, dans les raisonnements les plus abstraits de l'Analyse, rappeler comment ces raisonnements expriment des réalités, comment, par suite, ils nous aident à comprendre la réalité physique. Comme le mathématicien, le physicien trouve dans son œuvre la réponse à bien des questions fondamentales. »

Comment mieux compléter ces analyses des tendances générales de Borel que par les quelques phrases suivantes où il les résume lui-même et, où en avançant dans ses recherches et ses réflexions, il leur donne plus de portée et plus de force.

Je dois, d'ailleurs, avouer que j'ai été tout d'abord, comme beaucoup de jeunes mathématiciens, séduit par les théories [abstraites] de Cantor; je ne le regrette pas, car c'est là une discipline qui assouplit singulièrement l'esprit. Mais j'ai toujours pensé que ces études abstraites ne devaient pas être une fin en soi, mais seulement un moyen.

La tendance générale de mes recherches et de mes ouvrages d'enseignement est la suivante: « Je tâche d'y montrer que les Mathématiques ne sont pas un jeu purement abstrait de l'esprit, mais sont, au contraire, en étroite connexion avec la réalité concrète ».

C'est l'étude des phénomènes physiques qui suggéra les notions de continuité, de dérivée, d'intégrale, d'équation différentielle, de vecteur et de calcul vectoriel. Et ces notions, par un juste retour, font partie du bagage scientifique nécessaire à tout physicien; c'est à travers elles qu'il interprète les résultats de ses expériences. Il n'y a évidemment rien de mystérieux dans le fait que les théories mathématiques construites sur le modèle de certains phénomènes aient pu être développées et fournir le modèle d'autres phénomènes; ce fait est néanmoins digne de retenir notre attention car il comporte une

conséquence pratique importante: si de nouveaux phénomènes physiques suggèrent des modèles mathématiques nouveaux, les mathématiciens devront s'attacher à l'étude de ces modèles nouveaux et de leurs généralisations avec l'espoir légitime que les nouvelles théories mathématiques ainsi constituées se montreront fécondes en fournissant à leur tour aux physiciens des formes de pensée utiles. En d'autres termes, à l'évolution de la Physique doit correspondre une évolution des Mathématiques qui, sans abandonner bien entendu l'étude des théories classiques et éprouvées, doivent se développer en tenant compte des résultats de l'expérience.

C'est toujours au contact de la Nature que l'Analyse mathématique s'est renouvelée; ce n'est que grâce à ce contact permanent qu'elle a pu échapper au danger de devenir un pur symbolisme, tournant en rond sur lui-même.

On nous permettra d'ajouter que, bien après la publication de ces lignes mais bien avant que nous les ayons lues, nous avons soutenu plusieurs fois, un point de vue analogue (avec quelques compléments).

C'est ainsi que (pour montrer que les Mathématiques « ne sont pas un jeu purement abstrait de l'esprit » et que « les études abstraites ne devraient pas être une fin en soi »), nous avons cité l'exemple de la notion de « moment d'un vecteur ». Au lieu de sa définition classique, un mathématicien pourrait définir un moment différent, avec une autre direction et une autre intensité et il pourrait en étudier les propriétés. Mais ce serait bien un pur jeu de l'esprit, sans autre portée que de donner matière à des problèmes d'examens. Alors qu'au contraire, la notion classique de moment est le résultat d'une longue évolution, d'une patiente élaboration qui ont finalement permis d'obtenir ce merveilleux résultat: on peut remplacer tout système de forces appliquées à un corps solide par un système composé seulement d'une force et d'un couple.

En soutenant aussi avec Emile Borel que les notions mathématiques vraiment nouvelles et importantes sont suggérées par les problèmes que pose la Nature, nous avons admis cependant que d'autres notions ont été forgées artificiellement mais utilement par les mathématiciens pour harmoniser, généraliser, simplifier les résultats acquis. Il y a bien là *un* développement des mathématiques qui est autonome, mais c'est un développement

partiel en vue de simples commodités non absolument nécessaires.

D'ailleurs, Borel lui-même laisse entrevoir ce second aspect de l'élaboration mathématique, *à la fin* du passage suivant :

Je pense que ce court exposé de mes plus récents travaux de Calcul des Probabilités et de Physique mathématique aura mis en évidence l'esprit qui s'en dégage et qui apparaîtrait nettement à leur lecture : ne considérer jamais la science mathématique que comme l'auxiliaire de la physique ; faciliter la discussion des théories émises par les physiciens, mais n'empiéter jamais sur le domaine réservé à l'expérience, qui doit toujours décider en dernier ressort. C'est seulement en simplifiant l'exposition mathématique et la dégageant d'un appareil parfois superflu et inutilement encombrant que l'on facilitera la confrontation avec l'expérience, de théories qui sont souvent difficilement accessibles à un trop grand nombre de chercheurs de laboratoire.

Après avoir ainsi défini le but de la mathématique, Borel met en opposition la recherche des difficultés et celle de la simplicité.

C'est grâce à l'étude des théories physiques que l'on peut éviter certains des défauts que risque d'entraîner avec elle une tendance trop grande à l'abstraction ¹⁾ ; la joie intellectuelle que l'on a à vaincre un obstacle jusque-là insurmonté donne, en effet, la tentation de rechercher les difficultés pour le seul plaisir de les vaincre ; je crois avoir donné assez d'exemples de solutions difficiles, parfois vainement cherchées auparavant, pour pouvoir dire qu'à mon sens, ce n'est pas cette recherche de la difficulté qui est le but le plus élevé de la science mathématique, mais bien plutôt la simplicité des résultats et des méthodes ²⁾.

ÉLÉMENTS CALCULABLES OU EFFECTIVEMENT DÉFINIS

De plus en plus, dans les mathématiques modernes, on met en opposition les définitions constructives et les définitions descrip-

¹⁾ Il est pourtant certain que la tendance actuelle des mathématiciens est d'aller toujours vers une plus grande abstraction. Elle n'offre de danger que si — comme malheureusement cela arrive — elle élimine l'intuition et n'a d'autre but qu'elle-même. Ce sont là quelques-uns des défauts visés par Borel.

²⁾ M. Paul Lévy pourrait témoigner combien souvent dans nos conversations privées — qui m'ont si souvent été utiles — j'ai souligné la même thèse. J'y ajoutais qu'une chose m'enchantait particulièrement, c'est la solution simple d'un problème, *important en soi, mais qu'on n'avait pas songé à poser.*

tives. Dans les premières, on indique comment former, comment construire l'élément: nombre, figure, fonction, que l'on veut définir. Dans les secondes, on n'essaie pas de déterminer complètement les éléments que l'on considère, on se contente de supposer qu'ils vérifient certaines conditions.

Les dernières définitions ont le grand avantage de simplifier souvent les raisonnements et généralement de leur donner une portée plus générale.

Les premières sont indispensables pour passer de la théorie aux applications et même elles permettent, auparavant, de s'assurer de l'existence et, éventuellement, de l'unicité de l'élément à définir.

Borel préfère ces définitions constructives et il a beaucoup contribué à leur étude générale en utilisant et précisant les notions « d'éléments calculables » et « d'éléments effectivement définis ». C'est le sujet des citations suivantes :

J'espère avoir montré que le point de vue que j'ai adopté et qui consiste, en somme, à considérer que, pour les fonctions comme pour les êtres vivants, les *réalisés* sont autrement intéressants que les *possibles*, a été fécond en résultats. Ce point de vue était celui d'Hermite, qui le qualifiait de *réaliste*: pour lui, l'observation des faits analytiques était la source la plus féconde des découvertes mathématiques; dans un de ses derniers écrits, M. Poincaré a fait observer avec beaucoup de finesse et quelque subtilité, qu'on pourrait aussi bien qualifier d'*idéaliste*, ce point de vue pragmatique, car les êtres mathématiques que nous étudions ne sont réels pour nous que parce qu'ils ont été pensés par nous; leur réalité vient donc de notre esprit. Mais la démonstration importe peu...

On est ainsi conduit... à prendre une position en quelque sorte intermédiaire entre les géomètres disposés à ne considérer que les « bonnes » fonctions et ceux qui auraient pu être tentés de croire que ces « bonnes » fonctions ne sont qu'un cas extrêmement particulier des fonctions « générales ». Nous savons d'une manière précise que ni les uns, ni les autres n'ont tout à fait tort; au point de vue abstrait de Dirichlet ou de Riemann, les fonctions totalement discontinues sont, en effet, les plus générales; il n'en est pas de même si l'on se borne aux fonctions que l'on peut effectivement définir (même si l'on prend le mot *définir* dans le sens le plus large possible).

Borel dit ailleurs :

Si des fonctions qui peuvent être définies analytiquement « sont compliquées » (discontinues), elles ne sont, en général, pas *calculables*,

c'est-à-dire que la connaissance numérique approchée de la variable n'entraîne pas la connaissance numérique approchée de la fonction: le fait d'être calculable est, semble-t-il, la condition indispensable pour qu'une fonction puisse être utilisée dans les applications.

Au point de vue abstrait, si l'on admet que toute théorie humaine doit s'exprimer, en dernière analyse, au moyen d'un nombre fini relativement petit de données, il semble difficile de nier la possibilité de constituer entièrement la théorie sans faire intervenir d'hypothèses impliquant l'existence d'éléments dont le nombre dépasse ce que l'imagination de l'homme peut concevoir.

... Il est clair que tous les éléments analytiques, nombres ou fonctions, qui peuvent être effectivement définis, sont en infinité dénombrable... Par *effectivement définis*, on doit entendre: *définis au moyen d'un nombre fini de mots*, et il est clair que les éléments pour lesquels le nombre de mots nécessaires à la définition est extrêmement grand devront être regardés comme ayant une probabilité extrêmement petite.

Il est clair que l'idéal de Borel serait que dans toute démonstration, dans toute définition n'intervienne (explicitement ou implicitement) qu'un nombre fini de mots.

Mais c'est un idéal lointain et Borel reconnaît l'avantage *actuel* de la notion de l'infini; comme le montre le passage suivant:

C'est fréquemment une simplification en mathématiques que de remplacer par l'infini un nombre fini très grand. C'est ainsi que le calcul des intégrales définies est souvent plus simple que celui des formules sommatoires et que le calcul des dérivées est généralement plus simple que celui des différences finies. De même, on a été conduit à remplacer l'étude simultanée d'un très grand nombre de fonctions d'une variable par l'étude d'une infinité continue de fonctions d'une variable, c'est-à-dire d'une fonction de deux variables. Par une généralisation plus hardie, M. Vito Volterra a été conduit à définir des fonctions qui dépendent d'autres fonctions, c'est-à-dire, dans le cas le plus simple, des fonctions de ligne, en les considérant comme des cas limites de fonctions qui dépendraient d'un très grand nombre de variables ou si l'on veut, d'un très grand nombre de points de la ligne.

Les mathématiques n'ont pu se constituer qu'en schématisant, en idéalisant les réalités concrètes dont elles sont parties, tel est le cas pour la notion de l'infini.

Borel donne dans le passage précédent, des exemples intéressants des simplifications ainsi apportées. Mais on pourrait en

donner de beaucoup plus élémentaires. Soit, par exemple, la somme $a + b$ de deux nombres entiers a et b . Si nous admettons que les nombres qui nous sont concrètement accessibles restent tous au-dessous d'une certaine limite N , la somme $a + b$, non seulement ne pourra pratiquement avoir de sens que si a et b sont inférieurs à N , mais même il faudra supposer que $a + b$ soit lui-même inférieur à N . Dans tout raisonnement où intervient une somme $a + b$, a et b devront être soumis à cette limitation. Comme le dit Borel (voir pp. 29 et 37), on peut concevoir la possibilité de construire une théorie soumise à de telles restrictions)¹. Mais que de complications ! Les raisonnements les plus simples deviendraient inextricables.

Dans le même passage de Borel, il est rappelé que Volterra a fréquemment insisté sur l'intérêt qu'il y a, pour généraliser, à passer à la limite du fini à l'infini.

Nous croyons utile, ici, de faire, une fois de plus, une distinction. Ce passage est en effet extrêmement utile quand il s'agit de raisonnements intuitifs, qui permettent, par analogie, de prévoir un résultat dans le cas infini, d'après sa forme dans le cas fini.

Mais, quand il faut passer à des démonstrations rigoureuses, on se heurte souvent à d'énormes difficultés.

Dans ce cas, l'expérience a souvent prouvé qu'il valait mieux procéder autrement. Chercher dans le cas fini à distinguer tout ce qui, dans les raisonnements connus, ne fait pas *effectivement* intervenir l'hypothèse du fini... Et constituer ainsi une théorie plus générale, ou obtenir des théorèmes plus généraux.

BOREL INITIATEUR

La description des tendances générales de l'œuvre de Borel qui résulte des appréciations de ses commentateurs et de lui-même, n'est cependant pas complète.

Nous avons dit ailleurs au sujet d'une des idées dues à Borel qu'il était *un initiateur*. Mais il l'a été aussi en introduisant d'autres notions.

¹) Robin avait publié un ouvrage dans ce sens.

Pour être précis, nous donnerons immédiatement les *noms* de quelques-unes de ces notions, mais, pour rester sur le terrain des généralités non techniques, nous réserverons leurs définitions et propriétés à la troisième partie.

Le rôle d'initiateur de Borel s'est exercé au sujet de notions dont les unes étaient le couronnement d'une suite d'essais qui avaient été faits pour donner une signification satisfaisante à une notion intuitive, par exemple la notion de mesure d'un ensemble, généralisant la notion de longueur d'un intervalle.

D'autres s'attaquaient à une théorie paraissant définitive mais qui, malgré sa beauté, présentait certains inconvénients, qu'il s'agissait de faire disparaître. Par exemple, la notion de « fonction analytique », due à Weierstrass laissait un fossé entre l'ensemble de telles fonctions et l'ensemble des fonctions très discontinues. Par sa notion de fonction monogène ou quasi analytique, Borel a jeté un pont insoupçonné entre ces deux ensembles.

Par exemple, aussi, on considérait seulement, avant Borel, les probabilités discontinues et les probabilités géométriques. Borel a montré qu'il existait entre ces deux catégories une troisième, celle des « probabilités dénombrables » dont il a étudié les propriétés.

Par exemple encore, il y avait aussi une coupure entre la famille des séries convergentes et celle des séries divergentes. Borel a encore lancé un pont non moins insoupçonné entre ces deux familles. Citons encore les travaux de Borel sur les « fonctions entières » qui lui ont permis de donner une démonstration directe du « grand théorème de Picard ».

C'est Borel lui-même qui fait ressortir la nature commune de ses apports sur ces différents sujets, en écrivant, avec raison : « ... je crois pouvoir faire observer que dans [ces] théories..., j'ai eu la bonne fortune d'apporter sur un point capital une contribution essentielle... grâce à laquelle la théorie a pu, en quelque sorte, franchir un point mort et prendre un essor nouveau ».

Il dit aussi : « Les résultats que je viens de résumer étaient absolument inattendus pour la plupart des géomètres. »

Et d'ailleurs, ce n'est pas tout. Les lignes ci-dessus étaient écrites par Borel en 1921, l'année même où, *après* la publication

des mêmes lignes, il faisait paraître la première des Notes *mémorables* par lesquelles il fondait, sept ans avant von Neumann, la théorie des jeux psychologiques (dont l'invention était, il y a peu de temps encore, faussement attribuée à von Neumann) ¹⁾.

Ici, il ne s'agit même plus de perfectionnement ou de franchissement d'un point mort, il s'agit de la création d'une notion tout à fait nouvelle, de l'entrée dans un monde entièrement nouveau, à savoir de l'introduction et de l'utilisation efficace des mathématiques dans un domaine: le domaine psychologique, qui paraissait inaccessible aux mathématiciens.

DES RÉSERVES PHILOSOPHIQUES

Nous avons apporté, dans ce qui précède, une adhésion enthousiaste aux diverses idées de Borel que nous venons de présenter. Si l'on y ajoute l'essentiel, c'est-à-dire les résultats et les méthodes nouvelles qui seront résumés dans la Troisième Partie, on ne peut s'empêcher de ressentir une vive admiration devant cet ensemble. *Emile Borel restera un des plus grands mathématiciens de son époque*, pourtant riche en très grands talents mathématiques.

Mais, si un résultat mathématique ne peut être que vrai ou faux, il n'en est pas de même des considérations qui l'accompagnent. En Philosophie des sciences, on peut soutenir des opinions opposées, ou qui paraissent opposées, sans qu'on puisse toujours affirmer que l'une est vraie et l'autre fausse.

On sait, par exemple, qu'un mathématicien aussi éminent que M. Hadamard, s'est trouvé parfois en désaccord avec les points de vue développés par Borel concernant les fondements des mathématiques. C'est pourquoi, il nous a paru utile de présenter, après les citations de Borel qui vont suivre, les objections qui viennent naturellement à l'esprit et auxquelles, d'ailleurs, nous répondrons en partie nous-même, à la page 38.

Nous avons reproduit plus haut, pages 28 et 29, des citations de Borel où il fait ressortir avec raison l'intérêt et l'utilité

¹⁾ Aussi avons-nous cru utile de reproduire les courtes notes consacrées par Borel à ce sujet, avec un commentaire, d'abord en traduction anglaise, dans *Econometrica*, puis en français dans la *Revue d'économie politique*.

des trois notions de fini, de calculable et d'effectivement défini. Nous avons préféré séparer de ces citations, d'autres citations (qui vont suivre) où, abondant encore dans le même sens, il semble, en outre, jeter un doute sur la légitimité des notions d'abstraction et d'infini. En d'autres termes, Borel ne se contente pas de recommander les définitions constructives, il critique les définitions descriptives. Pour que le lecteur pénètre bien la pensée de Borel, nous avons cité de très larges extraits écrits en ce sens. Ces extraits ne rencontreront peut-être pas une adhésion aussi unanime que les précédents. Nous exposerons donc à la suite, les quelques objections qui se présentent naturellement à l'esprit. Pour en faciliter la lecture, nous avons distingué par des lettres capitales A, B, C..., les différentes citations de Borel qui seront mises en question. Nous serions heureux si quelque lecteur, d'accord avec les idées de Borel, sur ces points, pouvait nous écrire pour réfuter les objections qui vont suivre.

Parmi les idées générales qui dominent l'œuvre de Borel, l'une de celles qui lui tiennent le plus à cœur est celle qu'il exprime, par exemple, sous la forme suivante :

A) Si l'on me demandait de caractériser par un trait commun la méthode que j'ai appliquée... [c']est un souci constant d'étudier les êtres mathématiques en eux-mêmes, comme le biologiste étudie les êtres vivants, de me familiariser avec eux et de ne pas me laisser influencer dans cette étude intrinsèque des individus par les préjugés et les traditions.

Cette méthode de travail m'a conduit à une conception réaliste des mathématiques qui distingue les êtres mathématiques pouvant être effectivement définis ¹⁾ de ceux dont l'existence est purement hypothétique.

B) Cauchy n'a jamais, à ma connaissance, exposé explicitement ce qu'il entendait par une fonction, ... pour lui, cette question ne se posait pas, « fonction » était le terme général qu'il employait pour désigner l'une quelconque des fonctions particulières considérées par les analystes, chacune de ces fonctions particulières ayant sa définition propre, à partir des fonctions élémentaires (au moyen de séries, d'intégrales, d'équations différentielles, etc.); il est sous-entendu que les raisonnements faits sur la « fonction » en général, s'appliqueront, en outre, aux fonctions particulières qui pourront être découvertes

¹⁾ Le sens de cette expression est précisé par Borel dans la citation de la p. 29.

ultérieurement et qui possèdent les propriétés spécifiées dans les énoncés (propriétés qui consistent le plus souvent en la continuité de la fonction et de sa dérivée).

C'est ainsi qu'un biologiste peut parler d'un « être vivant » ou un chimiste d'un « corps simple » sans avoir été obligé de se créer une conception *a priori* de l'être vivant en soi ou du corps simple en soi; ils pensent simplement aux êtres vivants, aux corps simples, qu'ils connaissent ou qu'ils pourraient connaître.

On a opposé à cette manière de voir de Cauchy, la méthode, en apparence plus générale, qui consiste à se donner la fonction *a priori* comme une correspondance qui n'a pas besoin d'être formulée explicitement pour être conçue... Ce n'est pas ici le lieu de discuter si ce qui ne peut pas être formulé peut être réellement objet de science. Deux remarques nous suffiront: d'une part cette conception plus générale de la fonction a conduit à construire et à étudier des fonctions auxquelles on n'eut, sans doute, pas songé sans elle; elle a donc été utile. Mais, d'autre part, cette construction effective d'expressions analytiques représentant les fonctions conçues a eu pour résultat de rendre désormais inutile la conception *a priori* de la fonction; après un détour, on revient, *en fait*, au point de vue de Cauchy; on est simplement plus renseigné que ne l'était Cauchy sur l'infinie variété des fonctions que l'on peut obtenir en combinant les moyens analytiques que Cauchy connaissait. Le progrès réalisé par le retour aux idées de Cauchy est cependant très grand; car on possède, pour classer cette infinie variété, une base solide qui faisait défaut dans la conception purement abstraite; cette base, c'est l'étude systématique des procédés de construction à partir des éléments.

C) Il existe certainement (si ce n'est point un abus d'employer ici le verbe *exister*) dans le continu géométrique des éléments qui ne peuvent être définis: tel est le sens réel de l'importante et célèbre proposition de M. Georg Cantor: le continu n'est pas dénombrable. Le jour où ces éléments *indéfinissables* seraient réellement mis à part et où l'on ne prétendrait point les faire intervenir plus ou moins implicitement, il en résulterait certainement une grande simplification dans les méthodes de l'Analyse.

D) Beaucoup d'analystes... mettent au premier rang la notion du continu; c'est elle qui intervient d'une manière plus ou moins explicite dans leurs raisonnements. J'ai indiqué récemment en quoi cette notion du continu considérée comme ayant une puissance supérieure à celle du dénombrable me paraît être une notion purement négative, la puissance des ensembles dénombrables étant la seule qui nous soit connue d'une manière positive, la seule qui intervienne effectivement dans nos raisonnements. Il est clair, en effet, que l'ensemble des éléments analytiques susceptibles d'être réellement définis et considérés ne peut être qu'un ensemble dénombrable, je

crois que ce point de vue s'imposera de plus en plus aux mathématiciens et que le continu n'aura été qu'un instrument transitoire, dont l'utilité actuelle n'est pas négligeable... mais qui devra être regardé seulement comme un moyen d'étudier les ensembles dénombrables, lesquels constituent la seule réalité que nous puissions atteindre.

LES OBJECTIONS POSSIBLES

Déjà dans A (et aussi dans B), considérons, pour prendre le cas le plus simple, son exemple du biologiste. Selon Borel, en parlant d'un être vivant, les biologistes « pensent simplement aux êtres vivants qu'ils connaissent ou qu'ils pourraient connaître » ... « sans être obligés de se créer une conception *a priori* de l'être vivant en soi ». Si ce biologiste entre dans un pays nouveau, qu'il y rencontre: une montagne, un lac, un lion, etc., comment ne risquera-t-il pas de classer la montagne dans les êtres vivants, s'il n'a pas, *avant* d'entrer dans ce pays, une conception *a priori* des êtres vivants. Cette conception, il n'est pas nécessaire qu'elle soit innée, ni définitive, elle lui sera, sans doute, suggérée par les différences qu'il voit entre les êtres vivants qu'il connaît et les choses sans vie qu'il connaît aussi. Mais il faut qu'il se soit ensuite imposé à lui-même une telle discrimination, pour pouvoir l'appliquer plus tard aux éléments naturels qu'il rencontre.

De même, quoique dans un domaine tout autre, abordé dans B, il semble, d'après Borel, qu'après avoir étudié certaines fonctions particulières, on saura, en rencontrant de nouvelles entités mathématiques, si ce sont ou non, d'autres fonctions particulières, sans avoir *a priori* la notion générale de fonction. Un mathématicien rencontrera des égalités, des cercles, des inégalités, des sommes, des intégrales, etc. Comment saura-t-il distinguer, parmi ces éléments, ceux qui sont des fonctions, qu'il ne connaissait pas encore, sans avoir décidé au moins provisoirement, à l'avance, ce que c'est qu'une fonction ? S'il l'a décidé, il pourra, d'après Borel lui-même (B) appliquer à ces nouvelles fonctions particulières « les raisonnements faits sur « la fonction » en général ». S'il n'a rien décidé, il devra recommencer aveuglément ces raisonnements sur chaque nouvelle fonction particulière.

D'après Borel, lui-même (dans B), les raisonnements faits sur des fonctions formulées explicitement « s'appliqueront, en outre, aux fonctions particulières qui pourront être découvertes ultérieurement et qui possèdent les propriétés spécifiées dans les énoncés ». Qu'est-ce à dire, sinon que les raisonnements s'appuient sur le fait que chaque fonction particulière, d'une part détermine en fait une correspondance et en outre qu'elle possède les propriétés spécifiées dans les énoncés qui la concernent. Autrement dit, que, peut-être, avec Borel, on ne voudra, et on en a le droit, retenir et utiliser un théorème que pour les fonctions « effectivement définies », mais que *la démonstration elle-même ne fait pas intervenir cette restriction*. C'est-à-dire que *la théorie sera la même*, mais qu'elle ne sera appliquée par les uns qu'à certaines fonctions.

Dans B, Borel décrit un détour qui, attribuant une expression analytique (somme d'une série, intégrale...) à une fonction antérieurement conçue, ramène l'idée de fonction conçue à celle de fonction construite. Mais, comme nous l'avons dit, la théorie des fonctions comprend d'abord des théorèmes s'appliquant à toute fonction conçue, puis des propriétés particulières à chaque fonction construite. Le détour dont il est question augmentera bien le nombre de ces propriétés particulières, mais ne changera rien à la théorie générale: *pour celle-ci, il n'y a pas de détour*. Pour citer seulement un exemple: on sait qu'une fonction conçue comme continue en chaque point d'un segment est uniformément continue. Et pour énoncer et démontrer ce théorème, nous n'avons pas à nous préoccuper si la fonction est ou non « effectivement définie ».

A la fin de B, Borel dit que « pour classer cette infinie variété [de fonctions], on possède une base solide qui faisait défaut...: l'étude systématique des procédés de construction... ». Cela est tout à fait exact, pourvu qu'on comprenne qu'il s'agit d'un moyen *supplémentaire*, et non unique, de classification, s'ajoutant (disons-le, très utilement) aux moyens *déjà* connus.

Dans C, Borel considère qu'il y aurait « une grande simplification dans les méthodes de l'Analyse » si « les éléments indéfinissables étaient réellement mis à part ».

Ne serait-on pas, au contraire, plutôt porté à croire qu'en se préoccupant d'introduire une telle discrimination dans les raison-

nements, on les compliquerait plutôt qu'on ne les simplifierait. Reportons-nous à l'exemple de la page 30. Il semble bien que Borel considère (comme d'ailleurs nous-même) que les très grands nombres nous sont inaccessibles. Dès lors, si en les rangeant dans les « indéfinissables » on « les mettaient réellement à part », on tomberait dans les complications signalées, page 30, pour démontrer, par exemple, ce théorème bien élémentaire que $a+b = b+a$.

Tous seront d'accord avec Borel pour donner l'avantage aux définitions constructives dans les applications. Mais dans les démonstrations, les définitions descriptives seront souvent plus commodes. Donnons un exemple. Prenons un élément mathématique aussi élémentaire, aussi simple, que le milieu d'un segment rectiligne AB . On peut en donner une définition descriptive: c'est un point M du segment AB , s'il en existe, tel que $MA = MB$. Cette définition très simple laisse en doute les deux questions: y a-t-il un tel point; s'il y en a un, y en a-t-il un seul ou plusieurs? Une définition constructive répond en même temps à ces deux questions. Par exemple on peut dire:

Traçons deux cercles de même rayon égal à AB mais de centres respectifs A et B . Ils se coupent en deux points C et D . La droite CD coupe AB au point M cherché. Nous avons ainsi un des moyens graphiques de définir M ; en même temps, cette construction établit l'existence et l'unité de M .

Mais, d'autre part, combien une telle définition (constructive) serait encombrante dans toutes les démonstrations faisant intervenir le milieu d'un segment! C'est la définition descriptive qui est, avec raison, universellement employée dans les démonstrations.

S'il n'est pas toujours possible de suivre Borel dans toutes les conséquences qu'il tire au cours des passages $A, B...$, que nous venons de citer, cela tient parfois à certaines contradictions, au moins apparentes. Par exemple (p. 29), un élément ne peut être « effectivement défini » que s'il est défini au moyen « d'un nombre fini de mots ». Et, pourtant dans D , les ensembles dénombrables (donc éventuellement infinis) nous sont présentés comme « la seule réalité que nous puissions atteindre ».

D'ailleurs, que signifie une définition « en un nombre fini de mots »? Si, parmi ces mots, figure « l'infini », la définition

sera-t-elle réellement distincte d'une définition comprenant une infinité de mots ? D'autre part, la notion « infini » elle-même peut s'exprimer en un nombre fini de mots. Par exemple, la suite *infinie* des nombres entiers peut se définir comme : une suite d'entiers successifs où chaque entier est suivi d'un autre entier.

La notion « infini » nous paraît être une « idéalisation » commode (et même indispensable dans la mathématique moderne) de la notion de grand nombre. S'il en est ainsi, on ne comprendra donc pas comment Borel peut présenter la notion d'ensemble dénombrable comme « la seule réalité que nous puissions atteindre ». Il faudrait en conclure, en particulier, que la notion de l'infini est une réalité que nous pouvons atteindre, alors qu'elle apparaît comme une idéalisation de la notion de grand nombre et non pas comme une réalité.

Ce point de vue a été déjà exprimé, il y a plus de deux siècles, par le grand mathématicien et philosophe Leibniz, qui, dans une lettre privée écrite à Danguicourt en 1716, écrivait : « Je leur témoignais que je ne croyais point qu'il y eut des grandeurs véritablement infinies, ni véritablement infinitésimales, que ce n'étaient que des fictions, mais des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement, comme les racines imaginaires dans l'algèbre. »

A partir du moment où l'on admet l'infini, où, donc, on introduit une idéalisation, on ne voit pas pourquoi on considérerait comme hétérodoxe le continu et les nombres transfinis. Ce ne sont pas des réalités, mais ce sont, au même titre que les ensembles dénombrables, des idéalisations commodes et utiles.

RÉPONSE PARTIELLE AUX OBJECTIONS PRÉCÉDENTES

Nous avons sélectionné, à partir de la page 33, les passages de Borel où les méthodes descriptives semblent le plus énergiquement condamnées. Toutefois, il faut signaler que cette condamnation n'était pas entièrement définitive. Borel n'a pas hésité lui-même à employer, dans certaines démonstrations, des méthodes seulement descriptives, tout en souhaitant les voir remplacer plus tard par des méthodes descriptives. On en verra

un exemple dans le passage suivant, à la fin d'un mémoire de 1919. Dans ce mémoire, il ne dédaigne pas de démontrer un résultat qui lui paraît intéressant, bien que mal défini à son sens : « étant donnée une série à convergence aussi lente que l'on veut, on peut définir un α tel que la série (80) correspondante converge plus lentement que la série donnée » ¹⁾. Mais il ajoute aussitôt : « Mais les séries ainsi « définies » ne sont pas « bien définies » au sens que l'on doit donner à ce terme lorsqu'on se place au point de vue des définitions constructives. » La question reste donc ouverte de savoir si, à ce point de vue, « il est ou non possible de construire... »

Enfin, délaissant ce procès des définitions descriptives et nous plaçant *sur un plan psychologique*, on notera avec intérêt l'observation suivante de Borel :

Ceux qui ne sont pas mathématiciens sont... portés à considérer les mathématiques comme une science essentiellement inhumaine dans laquelle la personnalité des hommes qui s'y consacrent ne joue aucun rôle.

Une telle conception des mathématiques me paraît complètement inexacte..., je crois discerner que la sympathie et les oppositions de caractères entre les hommes jouent un rôle important dans la recherche et la découverte scientifique.

Tous les mathématiciens seront d'accord sur l'affirmation essentielle contenue dans cette citation. Ils penseront avec Borel que la personnalité d'un mathématicien joue un grand rôle dans ses recherches.

L'affirmation contenue dans la seconde phrase de cette citation sera plus inattendue pour le grand public et même pour bien des mathématiciens. Elle en est, pour cela même, plus intéressante. Mais peut-être est-il nécessaire d'en préciser la portée.

Dans la personnalité des mathématiciens, il faut ranger en effet, à côté des caractéristiques morales ou affectives, les caractéristiques purement intellectuelles et celles qui dérivent des milieux où ils ont vécu. Jusqu'à quel point interviennent-elles respectivement dans les recherches des mathématiciens ? D'après

¹⁾ Il ne paraît pas nécessaire d'entourer cette phrase, du contexte, pour en préciser la signification. Il suffit d'observer que, conformément à la phrase suivante de Borel, elle introduit une notion « définie » mais non « effectivement définie ».

Borel « la sympathie et les oppositions de caractères entre les hommes jouent un rôle important dans la recherche et la découverte scientifique ». Sans doute l'expérience personnelle de Borel, en relation avec de très nombreux mathématiciens, lui a-t-elle fourni des exemples d'une influence de cette nature. On notera, toutefois, qu'il parle d'un rôle important et non d'un rôle prépondérant. C'est, sans doute, avec cette limitation qu'il faut comprendre cette citation.

En particulier, les changements d'orientation d'un savant seront souvent la conséquence de changements dans le milieu qui l'entoure. Ce sera la guerre qui le conduira à étudier le calcul des probabilités, la balistique, etc. Ce sera la nomination à une nouvelle chaire, comme ce fut le cas de Henri Poincaré, d'Emile Borel lui-même. (Après des découvertes brillantes de mathématiques pures, Borel, comme Poincaré, se consacrèrent avec succès aux mathématiques appliquées quand ils furent successivement nommés professeurs de Calcul des probabilités et Physique mathématique.) Mais ce sont surtout les caractéristiques mentales, non affectives, d'un savant qui dominent ses travaux, et dont ceux-ci portent la marque.

Les uns cherchent à découvrir des situations paradoxales, étonnantes, à diagnostiquer des « cas pathologiques ». D'autres, tout au contraire, n'étudient ces cas, qui paraissent singuliers, que pour modifier les définitions et faire ainsi apparaître ces cas comme des cas particuliers qu'on pouvait prévoir. Les uns, analystes habiles, cherchent, pour un être mathématique déterminé, à en établir les propriétés, les formules les plus précises, et les plus utiles. D'autres comparent des êtres mathématiques distincts, en discernent les propriétés communes et formulent une théorie qui permet d'établir en une seule fois toutes ces propriétés communes, etc. Ce sont là des façons de voir qui sont à peu près indépendantes du domaine étudié et qui dépendent avant tout de la personnalité de l'auteur, et plus particulièrement de ses caractéristiques mentales. Ses caractéristiques affectives n'apparaissent généralement dans ses écrits que lorsqu'ils donnent lieu à une polémique, ce qui, par la nature même des mathématiques, est assez rare et en tout cas plus rare que pour les autres sciences.

Nous terminerons cette esquisse en citant une remarque profonde de Borel dont la portée s'étend bien *au delà des mathématiques*.

S'il m'est permis d'ajouter quelques mots de conclusion..., je voudrais dire qu'à mon avis, l'unité de l'esprit humain est plus importante que sa diversité et que les méthodes d'invention, d'imagination, de découverte, sont beaucoup plus analogues qu'on ne le croit généralement dans les divers domaines où s'exerce l'activité de l'esprit.

Borel n'a pas eu l'occasion, semble-t-il, de faire connaître sur quoi se basait cette opinion.

On nous permettra donc de présenter plusieurs exemples à l'appui.

Nous pensons que pour beaucoup de mathématiciens, la découverte se produit en deux stades presque contradictoires. Dans l'un, c'est l'intuition qui règne, sans grand souci de rigueur, ni de clarté. Une fois la méthode et le résultat entrevus, le mathématicien reviendra sur ses pas, contrôlera ses raisonnements, il cherchera à les rendre plus rigoureux, plus simples, plus élégants.

Passant à un tout autre domaine, j'ai eu l'occasion d'entendre mon frère, André Fréchet, alors directeur de la célèbre Ecole nationale Boule, m'expliquer comment il conseillait à ses élèves d'opérer pour faire un projet de meuble. D'abord donner libre cours à son imagination, chercher surtout à décider quelle forme donner à l'objet, choisir les couleurs, etc., en somme, tendre à choisir le meilleur résultat, sans s'occuper de sa réalisation. Mais, ensuite, retourner son tablier, se préoccuper de la possibilité, de la facilité de la réalisation, modifier au besoin le premier projet pour en limiter le prix, etc.

Dans un troisième domaine, l'économiste, feu Nogaro, m'avait, indépendamment, exposé aussi comment c'étaient deux stades distincts qui le conduisaient à un nouveau mémoire.

Un parallélisme frappant se révèle ainsi au cours du processus de création, dans ces trois domaines si différents.

Mais ces exemples soulèvent une objection; si on laisse courir sans bride son imagination, dans le premier stade, les nécessités techniques ne vont-elles pas, dans le second stade, écarter les projets rêvés dans le premier stade.

Dans un passage dont nous n'avons malheureusement pas gardé trace et que nous ne résumerons qu'imparfaitement, Paul Valéry répond à cette objection par une explication qui, donnée pour la poésie, s'étend à bien d'autres domaines de pensée. Dans le premier stade, le poète se livre bien à son inspiration, mais le maniement de la langue, le sens du rythme, sont devenus chez lui une seconde nature, de sorte que son inspiration reste inconsciemment sous l'influence des règles de l'écriture poétique. Le projet sorti de l'inspiration est comme le premier souffle du nouveau-né, qui est déjà préparé à vivre.