2. Brève description de l'édifice mathématique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

ii) *Les expériences touchant la réforme de l'enseignement mathématique réussissent toutes, systématiquement.* Cela tient à l'enthousiasme collectif du maître et des élèves qui vivent ensemble une aventure unique avec le sentiment d'être à la pointe du progrès. Aujourd'hui, le terme d'« expérience » désigne en ces matières une réalisation définitive pour laquelle l'impression des manuels a été provisoirement différée en vue de corrections mineures.

Mais, lorsqu'au lieu de borner son attention aux quelques maîtres faisant de la recherche didactique, on s'intéresse au corps enseignant dans son ensemble, on voit se poser le grave problème de la *formation des maîtres.* Celle-ci doit être envisagée sous quatre angles:

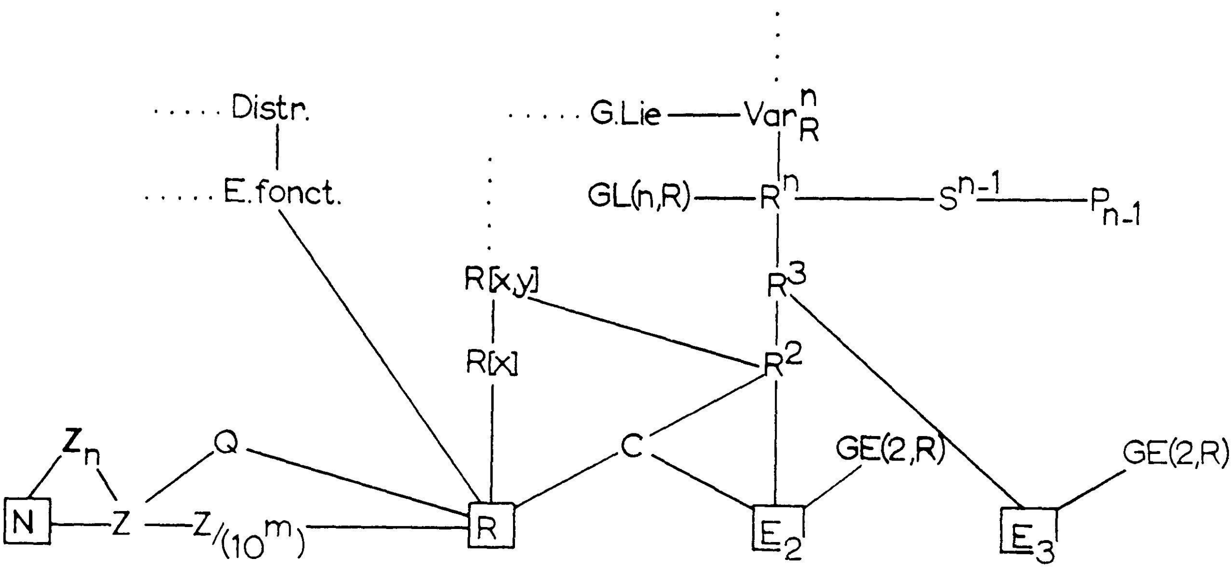
a) *L'aspect social:* rôle de l'école dans la société; rôle du maître à l'école , dans la vie, etc.
b) *L'aspect psychologique:* connaissance de soi, des enfants, des adultes.
c) *L'aspect culturel:* place des mathématiques dans une éducation harmonieuse; culture personnelle du maître qui ne doit pas être, aux yeux de ses élèves, un barbare spécialisé.
d) *L'aspect technique:* d'une part l'acquisition de connaissances et d'aptitudes proprement mathématiques; d'autre part une information paramathématique touchant l'histoire des mathématiques, les problèmes philosophiques soulevés par les mathématiques, la psychologie du mathématicien, le rôle et la signification des mathématiques.

Bien que ces différents points soient étroitement liés, nous nous bornerons ici à la première partie de *d)*, à savoir la formation proprement technique du mathématicien-enseignant.

2. Brève description de l'édifice mathématique

Afin d'y voir plus clair, il peut être utile de se représenter schématiquement l'édifice mathématique avec l'espoir — ou la crainte — d'y trouver une division naturelle qui permettrait d'attribuer sans équivoque telle partie à l'école secondaire et telle autre à l'enseignement universitaire. En se plaçant à deux points de vue distincts, on peut faire apparaître ce que nous appellerons *l'échelle naturelle* et le *domaine des structures*. Par prudence, nous prévoirons un « résidu » où nous mettrons les objets auxquels le mathématicien est susceptible de s'intéresser, mais qu'il est difficile de faire apparaître même indirectement dans l'un des deux tableaux principaux.

Tableau A. L'échelle naturelle

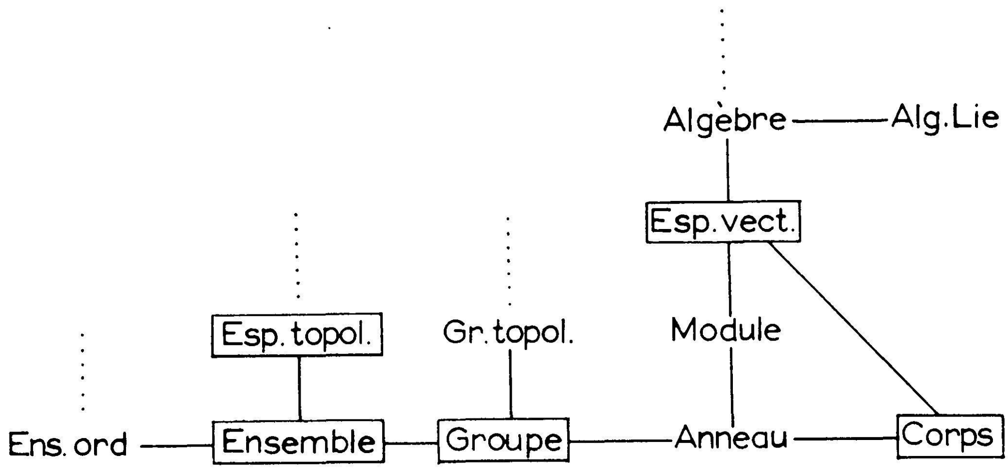


On voit figurer dans ce schéma:

N: ensemble des entiers naturels (0, 1, 2, 3,. . ., n,. . .)
Z: ensemble des entiers rationnels (0, 1, —1, 2, -2,. . ., n, —n,. .).
Z_n: ensemble des classes d'entiers rationnels (mod n).
Q: ensemble des nombres rationnels.
$Z/(10^m)$: ensemble des nombres rationnels représentables par des développements décimaux limités (soit l'anneau des fractions de Z par rapport à la partie de Z formée des nombres de la forme 10^m, où m est dans Z).
R: ensemble des nombres réels.
E_2: plan euclidien continu.
E_3: espace euclidien « ordinaire » continu.
GE (2, R): ensemble des isométries de E_2.
GE (3, R): ensemble des isométries de E_3.
C: ensemble des nombres complexes.
R [x]: ensemble des polynômes à une lettre x, à coefficients réels.

$R[x, y]$: ensemble des polynômes à deux lettres x et y, à coefficients réels.
R^n : ensemble des suites de n nombres réels, $n = 2, 3, \ldots$
S^{n-1}: sphère réelle de dimension n—1.
P^{n-1}: espace projectif réel de dimension n—1.
$GL(n, R)$: groupe linéaire réel complet de degré n.
Var_R^n: classe des variétés réelles de dimension n.
G. Lie: classe des groupes de Lie.
E. fonct: classe des ensembles de fonctions à valeurs réelles, définies sur des parties non vides de R.
Distr.: classe des distributions.

Tableau B. Domaine des structures



Les abréviations figurant dans ce schéma signifient:

Ens. ord.: ensemble ordonné.
Esp. topol.: espace topologique.
Gr. topol.: groupe topologique.
Esp. vect.: espace vectoriel.
Alg. Lie: algèbre de Lie.

C. Résidu

a) Notions et questions logiques.

b) Etude des fondements.

c) Problèmes actuellement inclassables (comme, par exemple, celui-ci: existe-t-il un chiffre qui n'apparaisse qu'un nombre fini de fois dans les décimales du nombre π ?), etc.

Il convient de souligner que les tableaux A et B ne sont ici qu'ébauchés. En outre, même si l'on fait abstraction de la partie résiduelle C, la réunion des tableaux A et B ne donne pas une vue complète de l'édifice mathématique. Ainsi, par exemple, la notion d'espace métrique (muni d'une distance réelle) n'apparaît ni dans l'un, ni dans l'autre. Dans le domaine des structures, il convient de l'imaginer à proximité des espaces topologiques. Mais, par ailleurs, elle emprunte certaines de ses propriétés à R et par là touche à l'échelle naturelle. On peut dire que les tableaux A et B sont comme des projections complémentaires de l'édifice mathématique ou si l'on préfère, que celui-ci résulte du produit des tableaux A et B.

3. Observations sur les tableaux A et B

a) *Les tableaux A et B ne sont pas essentiellement indépendants.*

En effet, les liaisons figurant dans le tableau A symbolisent des procédés de construction canoniques élaborés dans le domaine des structures. Réciproquement, une structure n'apparaît dans le tableau B que lorsqu'elle possède suffisamment de modèles intéressants dans l'échelle naturelle. A ce propos, il est opportun de répéter qu'il n'existe que bien peu de notions mathématiques qui ne soient pas préfigurées dans N, R, E_2 ou E_3 et les objets qui s'y rapportent directement.

b) *Les tableaux A et B sont monolytiques l'un et l'autre.*

Passons rapidement sur un clivage « vertical » comme celui qui consiste à distinguer entre propriétés algébriques et propriétés topologiques. Il présente un intérêt méthodologique évident, mais ne correspond pas à une division naturelle de l'édifice mathématique. La topologie use largement de l'algèbre et aucun algébriste ne renoncerait aux services de la topologie de Zariski, par exemple.

Nous recherchons ici une réparation « horizontale » permettant de distinguer entre mathématiques élémentaires et mathématiques avancées. Et là, il nous faut reconnaître qu'un tel scindage n'apparaît pas naturellement. Certes, on peut noter l'existence