4. Critique du système des axiomes PI à P VII

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1964)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nous avons vu que $D(P_1, P_2)$ est un carré dans le corps K, qui est pythagoricien. Posons alors:

$$d(P_1, P_2) = \left(D(P_1, P_2)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il découle immédiatement des propriétés de D que d est invariante relativement à G et qu'elle satisfait les conditions 1) et 2) appliquées aux K-distances dans le plan. De plus, prenons trois points quelconques P_1, P_2 et P_3 et désignons par d_1, d_2 et d_3 les éléments $d(P_2, P_3)$, $d(P_3, P_1)$ et $d(P_1, P_2)$ respectivement. On voit sans peine que:

$$S(P_1, P_2, P_3) = (d_1+d_2+d_3)(-d_1+d_2+d_3)(d_1-d_2+d_3)(d_1+d_2-d_3),$$

où $S(P_1, P_2, P_3)$ est la quantité définie par (7) au n° 2.11. En vertu de la relation (8) figurant au même numéro, $S(P_1, P_2, P_3)$ est un carré dans K. Mais, dans l'égalité ci-dessus, trois au moins des facteurs apparaissant au second membre sont positifs; il en est alors de même du quatrième. Par suite:

$$d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_3) + d(P_2, P_3),$$

quels que soient les points P_1, P_2 et P_3. Donc d est une K-distance dans le plan. La proposition 26 permet d'affirmer que G est le groupe des K-isométries du plan relativement à d.

Lorsque l'axiome P VII est satisfait, d est une distance dans le plan. Si, de plus, l'axiome P VI est vérifié, on peut énoncer:

Théorème 5. *Tout groupe satisfaisant les axiomes* P I *à* P VII *est isomorphe à un groupe* GE(2, K), *où* K *est un corps réel contenant la racine carrée de chacun de ses éléments positifs.*

4. Critique du système des axiomes P I à P VII

4.1. Lorsqu'on expose une théorie mathématique, il convient d'examiner le système des axiomes adoptés sous le triple aspect de la consistance, de la catégoricité et de l'indépendance. La consistance — ou non-contradiction — des axiomes que nous avons posés est assurée par l'existence d'un modèle satisfaisant: la géométrie euclidienne plane continue, par exemple.

Un système d'axiomes consistant est dit *catégorique* lorsque deux quelconques des modèles qui le satisfont sont isomorphes, c'est-à-dire quand ces modèles ne diffèrent éventuellement que par la désignation des objets qui les composent (pour une complication adéquate de la question, voir [5]). Dans le cas qui nous occupe, nous savons que les axiomes posés caractérisent indirectement les corps réels contenant la racine carrée de chacun de leurs éléments positifs. Le plus petit S de ces corps est une extension algébrique de type infini du corps Q des nombres rationnels; il est donc dénombrable. Il en est de même du groupe $GE(2, S)$. Ce groupe ne saurait être isomorphe au groupe $GE(2, R)$ de la géométrie euclidienne plane continue. Ainsi notre système d'axiomes n'est pas catégorique. Il ne pouvait d'ailleurs l'être, étant donnée la définition que nous avons adoptée pour les géométries euclidiennes. Cependant il résulte du théorème 5 que le système des axiomes *P I* à *P VII* est équivalent à la définition que nous avons prise pour le groupe fondamental d'une géométrie euclidienne plane.

Reste l'indépendance des axiomes. Les axiomes d'un système consistant $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ sont *indépendants* si, quel que soit $i = 1, 2, \dots, n$, on peut trouver un modèle satisfaisant les n-1 axiomes A_k pour lesquels $k \neq i$, mais ne vérifiant pas A_i. Remarquons d'emblée que notre système d'axiomes ne possède pas cette propriété qui, d'ordinaire, n'est obtenue qu'au dépens de la simplicité ou de la clarté. Ainsi plusieurs de nos axiomes n'ont de signification que si certains de ceux qui les précèdent sont satisfaits. On peut toutefois exiger des axiomes d'un système une indépendance relative dans le sens que voici: les axiomes d'un système consistant ordonné $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ sont *relativement indépendants* si, quel que soit $i = 2, 3, \dots, n$, il existe un modèle satisfaisant le système $(A_1, A_2, \dots, A_{i-1})$, mais ne vérifiant pas A_i. Nous allons montrer que c'est le cas de notre système.

Avant de passer à cet examen, formulons une dernière remarque d'ordre général. Ayant élaboré un système d'axiomes pour une théorie déterminée, on peut se proposer de réunir plusieurs axiomes consécutifs dans un même énoncé. C'est ce que nous avons fait dans le cas de l'axiome *P I*, par exemple, qui contient les axiomes du groupe, entre autres. L'exposé y gagne sans doute en simplicité, mais le procédé n'est pas orthodoxe du strict point de vue de l'axiomatique.

4.2. Examinons l'indépendance relative de l'axiome d'incidence *P II*. Considérons le groupe H des isométries propres de l'espace euclidien R^3. Il est engendré par l'ensemble E des demi-tours par rapport aux droites de R^3. H n'est pas un R-groupe relativement à E, car le produit de deux demi-tours d'axes perpendiculaires est encore un demi-tour. Formons alors le R-groupe H' naturellement associé à H (voir 1.1). Il est engendré par l'ensemble E' des éléments de la forme $a' = (a, -1)$, où a est dans E. Le groupe H ne se confond pas avec E; d'autre part, tout élément de H peut être obtenu en formant le produit de deux éléments convenablement choisis dans E. Il s'ensuit que H' est un R-groupe de dimension 2 engendré par E'.

Soit a, b et c trois éléments de E, et soit $a' = (a, -1)$, $b' = (b, -1)$ et $c' = (c, -1)$ les éléments de E' qui leur sont associés. Affirmer que $a'b'c'$ est dans E', c'est affirmer que abc est dans E, ce qui revient encore à dire que les axes des demi-tours a, b et c admettent au moins une perpendiculaire commune. Considérons alors dans l'espace R^3 quatre droites distinctes $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ et $\bar{d}$, telles que $\bar{b}$, $\bar{c}$ et $\bar{d}$ soient les côtés d'un triangle, que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ soient parallèles et que le plan $(\bar{a}, \bar{b})$ soit perpendiculaire au plan $(\bar{b}, \bar{c})$. Soit a, b, c et d les demi-tours d'axes respectifs $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ et $\bar{d}$, et soit a', b', c' et d' les éléments de E' qui leur sont associés. On voit alors que $a'b'c'$ et $a'b'd'$ sont dans E' mais que $a'c'd'$ n'y est pas. Par suite, le R-groupe H' ne vérifie pas l'axiome d'incidence.

4.3. Passons à l'axiome de bissection P III. Considérons le R-groupe de l'icosaèdre régulier. A titre d'exercice, il est intéressant de décrire ce groupe d'ailleurs bien connu en utilisant le langage des R-groupes. Désignons par A l'un des sommets de l'icosaèdre, que nous supposons plongé dans l'espace euclidien R^3. Désignons par $BCDEF$ le pentagone convexe régulier déterminé par les extrémités des arêtes issues de A. Soit O le centre de l'icosaèdre et soit A', B', C', D', E' et F' les sommets respectivement opposés à A, B, C, D, E et F. Désignons par G le groupe des isométries de l'espace euclidien R^3 laissant invariant l'icosaèdre dans son ensemble. Ce groupe est évidemment fini.

Par chaque arête de l'icosaèdre, il passe un plan de symétrie de la figure. Désignons par Σ l'ensemble des quinze réflexions de l'espace R^3 ainsi introduites, deux arêtes opposées correspondant à une même réflexion. Quelle que soit la paire de sommets non opposés que l'on prenne dans l'icosaèdre, la réflexion envoyant l'un sur l'autre appartient à Σ.

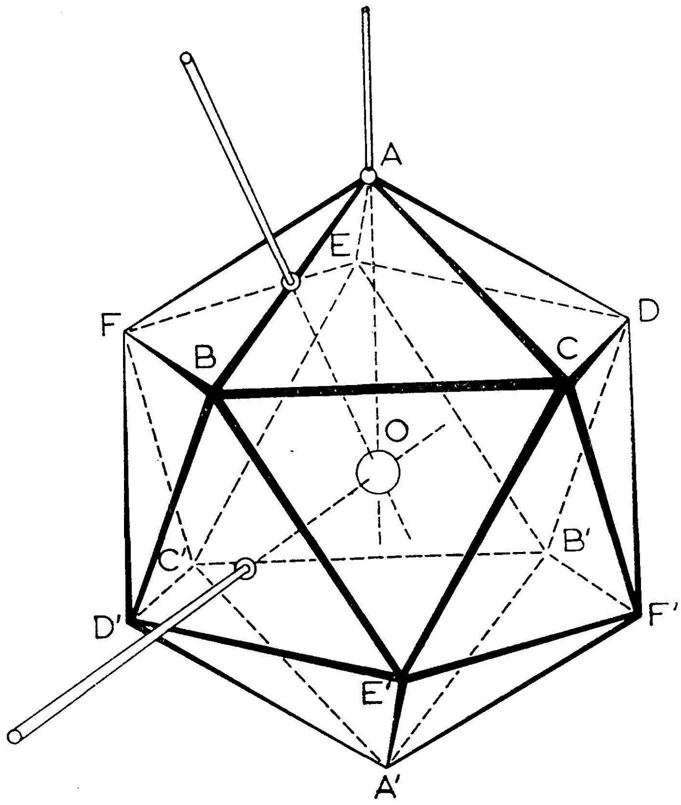

Fig. 11.

AB étant une arête quelconque, on peut trouver deux arêtes, DE et CF' par exemple, telles que AB, DE et CF' soit orthogonales deux à deux. Les réflexions attachées à ces trois arêtes ont pour produit la symétrie σ de centre O. Soit X un élément de G différent de σ. Il existe au moins un sommet, mettons A, que X n'envoie pas sur son opposé. Soit r l'élément de Σ envoyant $X(A)$ sur A. Quand $X \neq r$, l'un au moins des sommets B et C de la face ABC n'est pas fixe pour la transformation rX; admettons que $rX(B)$ est distinct de B. Ces deux sommets ne sont pas opposés: soit s l'élément de Σ qui envoie $rX(B)$ sur B. La transformation srX laisse fixes A et B. Lorsque $X \neq rs$, $srX(C)$ est distinct de C. La réflexion t associée dans Σ à l'arête AB envoie $srX(C)$ sur C. L'élément $tsrX$ appartient à G. Comme il laisse fixes les sommets A, B et C, il n'est autre que l'élément neutre de G. Par suite $X = rst$. D'autre part, Σ est distingué dans G.Il résulte donc de ce qui précède que G est un R-groupe de dimension 2 engendré par Σ.

La condition nécessaire et suffisante pour que trois éléments de Σ aient pour produit un élément de Σ est que les plans qui leur sont associés admettent une droite commune. Cela détermine une relation d'incidence dans Σ. Pour étudier les faisceaux dans Σ, combinons l'arête AB avec chacune des autres arêtes de l'icosaèdre, en nous bornant aux seuls couplages essentiellement différents.

Les arêtes AB et AC déterminent le faisceau des cinq éléments de Σ laissant fixe le point A. On peut attacher un tel faisceau à chaque paire de sommets opposés et nous désignerons par $\Phi(A)$ celui qui correspond à A (et A'). La réflexion associée à l'arête AB appartient encore au faisceau $\Phi(B)$.

Les réflexions correspondant à AB et $E'F'$ déterminent un faisceau contenant encore la réflexion associée à $C'D'$. Les plans de ces trois réflexions se coupent suivant la normale abaissée de O sur la face $BD'E'$. On peut ainsi attacher un faisceau de trois éléments à chaque paire de faces opposées; nous désignerons par $\Phi(BD'E')$ celui qui correspond aux faces $BD'E'$ et $B'DE$. La réflexion associée à AB appartient aux deux faisceaux $\Phi(BD'E')$ et $\Phi(ADE)$.

Les réflexions correspondant à AB et CF' déterminent un faisceau ne contenant pas d'autre réflexion. Leurs plans se coupent suivant la perpendiculaire abaissée de O sur AB. On peut attacher de la sorte un faisceau de deux éléments à toute paire d'arêtes opposées, et nous appellerons $\Phi(AB)$ celui qui correspond aux arêtes AB et $A'B'$.

Un décompte facile nous permet d'affirmer que nous avons ainsi épuisé tous les faisceaux auxquels appartient la réflexion relative à AB. Le R-groupe G, dont nous avons vu qu'il satisfait l'axiome d'incidence, ne satisfait pas l'axiome de bissection, puisqu'il contient des faisceaux formés de deux éléments distincts seulement.

Remarquons en passant que les faisceaux $\Phi(A)$ et $\Phi(BE')$ sont disjoints, tout comme les faisceaux $\Phi(BE')$ et $\Phi(ABC)$.

L'exemple précédent montre les interprétations géométriques que l'on peut faire intervenir assez naturellement dans l'étude des RI-groupes finis (voir [9]). Toutefois, on aurait pu le remplacer par des exemples plus simples tels que celui-ci: dans le plan euclidien continu, prenons trois points non alignés A, B et C. Considérons le groupe G' engendré par les demi-tours ayant pour centres A, B et C. C'est visiblement un R-groupe engendré par l'ensemble Σ' des demi-tours ayant pour centres les points d'un réseau plan: le réseau ayant pour maille génératrice le parallélogramme $ABCD$ construit sur ABC. Dans le plan, le produit de trois demi-tours est un demi-tour. L'axiome d'incidence est donc satisfait dans G' qui est un R-groupe de dimension 1. Le seul faisceau de Σ' est constitué par Σ' tout entier. Lorsque trois demi-tours x, y et z, les deux derniers étant distincts, sont tels que $y = xzx$, le centre de x est au milieu des centres de y et de z. Il en résulte que les demi-tours de centres A et B n'ont pas d'élément bissecteur dans Σ'.

A propos de ce dernier exemple, remarquons que les éléments impropres du R-groupe G' ne sont pas des isométries impropres, c'est-à-dire ne sont pas des éléments impropres du R-groupe $GE(2, R)$.

4.4. Passons à l'examen de l'axiome P IV. Considérons le groupe $GE(3, R)$ des isométries de l'espace euclidien R^3. C'est un R-groupe engendré par l'ensemble $\Sigma(3, R)$ des réflexions par rapport aux plans de l'espace R^3. Le produit de trois réflexions dans R^3 est une réflexion quand leurs plans ont une droite commune ou une normale commune. Cela définit manifestement une relation d'incidence dans $\Sigma(3, R)$. Deux réflexions distinctes dans R^3 admettent au moins un élément bissecteur, à savoir une réflexion transformant leurs plans l'un en l'autre. Cependant, $GE(3, R)$ ne vérifie pas l'axiome $P\ IV$, car il est bien connu qu'il est de dimension 3.

Nous avons observé à ce propos que tout RI-groupe satisfaisant l'axiome des faisceaux de première classe est de dimension 2 (voir prop. 4). En revanche, il existe des RI-groupes de dimension 2 ne contenant pas de faisceau de première classe: le R-groupe de l'icosaèdre en est un exemple.

L'indépendance relative de l'axiome d'Euclide est assurée par l'existence de la géométrie elliptique plane continue, comme nous l'avons déjà remarqué (nº 2.1).

4.5. Pour critiquer les deux derniers axiomes, nous utiliserons le fait que les cinq axiomes précédents caractérisent les corps formellement réels pythagoriciens. L'indépendance relative de l'axiome *P VI* sera établie lorsque nous aurons donné l'exemple d'un corps formellement réel pythagoricien dans lequel il existe des éléments positifs qui ne sont pas des carrés. Bien qu'il soit possible de trouver des exemples plus simples, nous allons construire un tel corps à l'aide de séries formelles (voir [6] et [8]).

Prenons une lettre T avec laquelle nous formons l'ensemble L des séries formelles:

$$\alpha = \sum_{i \in Z} a_i T^i \quad , \quad a_i \in R , \tag{1}$$

où i est un indice parcourant l'ensemble Z des entiers rationnels, et où les coefficients a_i sont des nombres réels, égaux à zéro sauf éventuellement pour un nombre fini ou non de valeurs de i supérieures à un certain entier rationnel dépendant de l'élément choisi dans L. L'élément nul de L, que nous noterons O, est celui dont tous les coefficients sont nuls. Pour un élément α non nul de L, soit n la plus petite valeur de i pour laquelle $a_i \neq O$; n est l'*ordre* de α, et a_n est le *coefficient dominant* de α. Par convention, l'ordre de O est infini. Nous assimilerons à R les éléments de L ayant la forme $a_0 T^0$. On introduit dans L une structure de groupe abélien noté additivement en posant:

$$\sum_{i \in Z} a_i T^i + \sum_{i \in Z} b_i T^i = \sum_{i \in Z} (a_i + b_i) T^i . \tag{2}$$

On définit une multiplication dans L en posant:

$$\Big(\sum_{i \in Z} a_i T^i\Big) \cdot \Big(\sum_{i \in Z} b_i T^i\Big) = \sum_{i \in Z} c_i T^i ; \quad c_i = \sum_{r+s=i} a_r b_s . \tag{3}$$

Il résulte immédiatement de cette définition que la multiplication est associative, commutative et distributive par rapport à l'addition; l'élément 1 est neutre vis-à-vis de la multiplication. D'autre part, si α et β sont deux éléments non nuls de L, l'ordre du produit $\alpha\beta$ est la somme des ordres de α et β; le coefficient principal de $\alpha\beta$ est le produit de ceux de α et β. Il s'ensuit que L est un anneau d'intégrité commutatif avec élément unité.

L est même un corps commutatif. Pour le montrer, on peut procéder par voie topologique, entre autres. On introduit une valuation dans L en posant $|O| = O$ et $|\alpha| = 2^{-n}$, où n est l'ordre de l'élément non nul α. En effet, on voit que:

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|; \quad |\alpha+\beta| \leqq \max(|\alpha|, |\beta|); \quad \forall \alpha, \beta \in L,$$

et que $|\xi| = O$ dans le seul cas où ξ est nul. On peut alors construire une distance d dans L en posant:

$$d(\alpha, \beta) = |\beta - \alpha|.$$

Comme on le voit sans peine, cette distance définit dans L une structure de groupe additif métrisable complet. On peut même utiliser le critère de convergence suivant: la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $(\alpha_k) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ d'éléments de L converge est que $d(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$ tende vers zéro lorsque k tend vers l'infini. Il en résulte que, quelle que soit la suite (β_k) d'éléments de L convergeant vers O, la suite (γ_r) définie par:

$$\gamma_r = \sum_{k=o}^{k=r} \beta_k,$$

converge dans L; sa limite est désignée par $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$.

Prenons dans L un élément α d'ordre fini n et de coefficient principal a_n. On peut le mettre sous la forme:

$$\alpha = a_n T^n (1 - \delta),$$

où δ est un élément de L d'ordre au moins égal à 1. La suite des puissances naturelles de δ tend vers O dans L. Il en est de même de la suite des éléments $(1-\delta)\delta^k$, où $k = O, 1, 2, \ldots$ Par conséquent, l'expression:

$$(1-\delta) \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k,$$

a un sens. Un calcul facile montre qu'elle représente l'élément unité de L. Il en découle immédiatement que α possède un inverse dans L, qui n'est autre que:

$$\alpha^{-1} = a_n^{-1} T^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k . \tag{4}$$

Donc L est un corps.

Ordonnons L en choisissant comme partie positive P l'ensemble des éléments dont le coefficient principal est strictement positif dans R, auxquels nous adjoignons l'élément O. P possède bien les propriétés indiquées au n° 3.1, et nous convenons de noter $\alpha \leqq \beta$ lorsque α et β sont deux éléments de L tels que $\beta - \alpha$ appartient à P. L'ensemble des carrés non nuls de L se confond avec celui des éléments strictement positifs d'ordre pair. En effet, si $\alpha \in L$ est d'ordre n et de coefficient principal a_n, α^2 est d'ordre $2n$ et son coefficient principal est a_n^2. Réciproquement, prenons dans L l'élément:

$$\beta = \sum_{j \in Z} b_j T^j ; \quad b_{2m} > 0 , \; b_k = 0 \quad \forall k < 2m .$$

Il existe dans L un élément $\gamma = \sum_{k \in Z} c_k T^k$ dont le carré égale β. On l'obtient en résolvant la suite d'équations:

$$c_m^2 = b_{2m} ; \quad 2c_m c_{m+1} = b_{2m+1} ,$$

$$2c_m c_{m+j} = b_{2m+j} - \sum_{k=m+1}^{k=m+j-1} c_k c_{2m+j-k} , \quad j = 2 , 3 , \ldots$$

et en posant $c_k = O$ pour tout $k < m$; de la sorte, on obtient d'ailleurs deux solutions opposées dans L. Il résulte immédiatement de là que la somme de deux carrés dans L est encore un carré et que -1 n'est pas un carré dans L. Donc L est formellement réel et pythagoricien. En revanche, il existe dans L des éléments positifs qui ne sont pas des carrés, comme l'élément T par exemple.

4.6. Passons à l'axiome *P VII*. Pour en montrer l'indépendance relative, nous nous proposons de donner l'exemple d'un corps commutatif ordonné non archimédien dans lequel tout élément positif est un carré. Prenons une lettre U et formons l'ensemble $\dot{M}$ des séries formelles:

$$\dot{\alpha} = \sum_{i \in Z} a_i \, U^{i.2^{-p}} \qquad a_i \in R\,, \tag{5}$$

où les coefficients a_i sont des nombres réels, nuls sauf pour un nombre fini ou non de valeurs de i supérieures à un certain entier rationnel dépendant de $\dot{\alpha}$, et où p est un entier rationnel non négatif dépendant lui aussi de $\dot{\alpha}$. On peut encore obtenir tous les éléments de $\dot{M}$ en remplaçant T par $U^{(2^{-p})}$ dans l'expression (1) des éléments du corps L, p prenant toutes les valeurs entières rationnelles non négatives. Dans l'expression (5), p est le *poids* de $\dot{\alpha}$. Si n est la plus petite valeur de i pour laquelle $a_i \neq O$, a_n est le *coefficient principal* de $\dot{\alpha}$.

Considérons comme équivalents deux éléments de $\dot{M}$ dont les développements sont formés des mêmes termes. Ainsi, on obtient tous les éléments de $\dot{M}$ équivalents à $\dot{\alpha}$ et de poids supérieurs à p en posant:

$$\alpha' = \sum_{j \in Z} a'_j \, U^{j.2^{-(p+r)}}\,; \quad a'_j = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad j = i.2^r\,, \\ 0 & \text{si} \quad pgcd(j\,,\, 2^r) \neq 2^r\,, \end{cases}$$

où r parcourt l'ensemble des nombres naturels. Appelons M l'ensemble des classes de $\dot{M}$ pour la relation d'équivalence que nous venons de définir. L'élément O de $\dot{M}$, dont le poids peut être considéré comme indéterminé, constitue une classe à lui seul. Si $\bar{\alpha}$ est la classe contenant l'élément non nul $\dot{\alpha}$ donné par (5), nous dirons que $\dot{\alpha}$ est un *représentant* de poids p de $\bar{\alpha}$. Tous les éléments de la classe $\bar{\alpha}$ ont le même coefficient principal, que nous appellerons *coefficient principal* de $\bar{\alpha}$. A tout couple d'éléments $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ de M, on peut associer au moins un couple de représentants $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ de même poids. On définit alors la somme et le produit de $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ à l'aide des relations (2) et (3), où l'on pose $T = U^{(2^{-s})}$, s étant le poids commun de $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$. Les expressions trouvées sont équivalentes à celles que l'on obtiendrait en remplaçant $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ par des éléments respectivement équivalents, de poids commun s'. Par passage au quotient, on définit manifestement une addition et une multiplication dans M. Les considérations faites au sujet de L montrent que M constitue un corps commutatif pour les opérations indiquées.

On ordonne M en considérant comme strictement positifs les éléments dont le coefficient principal est strictement positif dans R. Prenons un tel élément $\bar{\beta}'$. Soit

$$\dot{\beta}' = \sum_{i \in Z} b_i' \, U^{i.2^{-q}},$$

un représentant de $\bar{\beta}'$, où $b_i' = O$ quand $i < m$, et $b_m' > O$. On peut former un autre représentant $\dot{\beta}$ de $\bar{\beta}$ en posant:

$$\dot{\beta} = \sum_{j \in Z} b_j \, U^{j.2^{-(q+1)}},$$

où $b_{2i} = b_i'$ et $b_{2i+1} = O$, quel que soit i. Associons à $\dot{\beta}$ l'élément β du corps L défini par:

$$\beta = \sum_{j \in Z} b_j \, T^j .$$

Cet élément est strictement positif dans L et son ordre est pair. Il existe donc dans L un élément

$$\gamma = \sum_{k \in Z} c_k \, T^k,$$

dont le carré égale β. Il résulte de là que l'élément $\bar{\gamma}$ de M ayant pour représentant:

$$\dot{\gamma} = \sum_{k \in Z} c_k \, U^{k.2^{-(q+1)}},$$

admet pour carré l'élément $\bar{\beta}$. Donc tout élément positif de M est un carré.

Cependant, le corps M n'est pas archimédien. Désignons par $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\varphi}$ les éléments de M admettant pour représentants respectifs U^0 et U^{-1}. Quel que soit l'entier naturel n, on a $n\bar{\varepsilon} < \bar{\varphi}$.

4.7. Nous aurions pu permuter les deux derniers axiomes. Autrement dit, l'axiome *P VI* est indépendant du système constitué par les six autres axiomes. En effet, les axiomes *P I* à *P V* ainsi que l'axiome *P VII* caractérisent les corps réels pythagoriciens, comme on l'a vu. Soit Ω le plus petit d'entre eux (suivant la désignation adoptée par Hilbert). Le plan euclidien Π_Ω relatif à Ω peut être assimilé à une partie du plan euclidien Π_R relatif au corps R des nombres réels: ayant introduit dans Π_R un système de coordonnées orthonormales, on désigne par A et B les points de coordonnées (0, 0) et (1, 0); Π_Ω est l'ensemble des points de Π_R dont les coordonnées sont dans Ω. Mais Π_Ω est également l'ensemble des points de Π_R que l'on peut construire à partir de A et B par un nombre fini d'opérations à la règle et au transporteur de distances — ce dernier instrument permettant uniquement de reporter un segment connu sur une droite connue, à partir d'un point connu de cette droite. Or il existe des constructions possibles à la règle et au compas qui ne le sont pas à la règle et au transporteur de distances (comme la recherche d'un cercle tangent à trois cercles connus) (voir [15]). Il en résulte que l'axiome du compas n'est pas vérifié dans le groupe des isométries de Π_Ω.

4.8. Pour terminer, revenons à l'axiome d'Euclide. Nous avons montré que dans un groupe satisfaisant les cinq premiers axiomes les demi-tours engendrent un R-groupe de dimension 1 (corollaire prop. 13). Pourrait-on substituer cette affirmation à l'axiome $P\ V$? Il n'en est rien, comme le montre l'exemple suivant.

Soit L le corps des séries formelles à une lettre T sur le corps R des nombres réels, tel qu'il a été introduit au n° 4.5. Soit A l'ensemble des éléments de L dont l'ordre n est tel que $o \leqq n \leqq \infty$. C'est un sous-anneau de L. Le groupe $GE(2,\ L)$ obtenu en substituant L à K dans la définition de $GE(2,\ K)$ satisfait les cinq premiers axiomes. Dans le plan L^2, on peut introduire les notions de droite, de parallélisme, de perpendicularité, de point milieu comme en géométrie élémentaire.

Le *plan* A^2 est une partie du plan L^2. Nous appellerons *droite de* A^2 toute droite de L^2 contenant un point de A^2. Pour qu'une droite d'équation:

$$ax+by+c = 0 \qquad a\,,\, b\,,\, c \in L; \quad (a\,,\, b) \neq (0\,,\, 0)\,,$$

appartienne à A^2, il faut et il suffit que $c(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \in A$. Deux droites de A^2, perpendiculaires dans L^2, se coupent en un point de A^2. La réflexion de L^2 suivant une droite de A^2 applique A^2 sur lui-même. Le groupe des isométries de L^2 appliquant A^2 sur lui-même est isomorphe au groupe obtenu en substituant A à K dans la définition de $GE(2, K)$. Nous le désignerons par $GE(2, A)$. Il est engendré par l'ensemble $\Sigma(2, A)$ des réflexions de L^2 suivant les droites de A^2.

$(GE(2, A), \Sigma(2, A))$ est un RI-groupe. Trois droites de A^2 sont incidentes quand elles contiennent un même point de L^2 ou quand elles sont perpendiculaires à une même droite de L^2. L'axiome de bissection est satisfait dans $GE(2, A)$. En effet, soit a et b deux droites distinctes de A^2. En tant que droites de L^2, elles admettent au moins une bissectrice u. Si a et b se coupent en un point P de A^2, u passe par P et appartient donc à A^2. Si a et b sont parallèles, u contient le milieu M de toute paire de points de A^2 pris l'un sur a et l'autre sur b. Comme M est dans A^2, u appartient à A^2. Il reste à examiner le cas où a et b se coupent en un point de L^2 n'appartenant pas à A^2. On peut se borner au cas où a et b ont les équations suivantes (voir (1), n° 1.4):

$$(b) \equiv x = 0\,,$$
$$(a) \equiv mx - y + h = 0\,; \quad m\,, h \in L; \quad h \notin A\,; \quad h(1+m^2)^{-\frac{1}{2}} \in A\,.$$

Dans L^2, les bissectrices de a et b sont données par les équations:

$$(m \pm \sqrt{1+m^2})\,x - y + h = 0\,.$$

Pour que l'une de ces droites appartienne à A^2, il faut que l'un des éléments:

$$h(1+m^2)^{-\frac{1}{2}} \,.\, [(1+m^2)^{\frac{1}{2}} \pm m]^{-1}\,,$$

soit dans A. Pour cela, il suffit que l'un des éléments k_1 et k_2 donnés par $(\sqrt{1+m^2} \pm m)^{-1}$ soit dans A. Par hypothèse, h est d'ordre $-r$ dans L, où $r > o$. Comme la droite b appartient à A^2, m est d'ordre $-s$, où $s \geqslant r$. Par suite $\sqrt{1+m^2}$ est d'ordre $-s$, et l'un des éléments k_1 et k_2 est d'ordre positif s; il est dans A. L'une des deux bissectrices de a et b appartient donc à A^2; on vérifie aisément que ce n'est pas le cas pour l'autre.

Dans $\Sigma(2, A)$, un faisceau de première classe est l'ensemble des réflexions de L^2 suivant les droites de A^2 contenant un même point de A^2. Il existe deux familles de faisceaux de seconde classe: les systèmes polaires et les faisceaux singuliers; un faisceau singulier est constitué par les réflexions de L^2 suivant les droites de A^2 passant par un même point de L^2 n'appartenant pas à A^2.

Tout élément de $\Sigma(2, A)$ appartient à un seul système polaire. On peut en déduire que la proposition 13, qui ne s'appuie que sur cette partie de l'axiome d'Euclide, est encore vraie ici. Il en est de même de son corollaire. Nous avons donc construit un exemple de géométrie satisfaisant les quatre premiers axiomes ainsi que le corollaire de la proposition 13, mais ne vérifiant pas l'axiome d'Euclide. De plus, dans le groupe $GE(2, A)$, chaque réflexion appartient à une infinité de faisceaux de seconde classe, dont un seul système polaire. Cela montre que l'on n'épuise pas toutes les possibilités en énonçant les hypothèses *a*), *b*) et *c*) indiquées au n⁰ 2.1.

5. Axiomes de la géométrie euclidienne à plus de deux dimensions

5.1. Désignons par $(K_i)_{i \in J}$ la famille des corps réels contenant la racine carrée de chacun de leurs éléments positifs, J étant un ensemble convenable d'indices. Pour chaque entier naturel n $GE(n, K_i)$ désigne le groupe des isométries de l'espace K_i^n muni de la métrique euclidienne ordinaire. C'est un R-groupe engendré par l'ensemble $\Sigma(n, K_i)$ des réflexions par rapport aux hyperplans dans K_i^n. Les axiomes considérés jusqu'ici concernent les groupes $GE(2, K_i)$. Nous nous proposons de formuler un système d'axiomes caractérisant les groupes $GE(n, K_i)$, $i \in J$ et $n > 2$. Toutefois, pour utiliser les résultats obtenus pour $n = 2$ et pour éviter des répétitions, nous procéderons par récurrence sur n.

Auparavant, précisons quelques points. Soit (G, Σ) et (G', Σ') deux R-groupes G et G' respectivement engendrés par des parties distinguées Σ et Σ'. Ils seront dits « isomorphes en tant