§ 1. Théorèmes Préliminaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1963)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

faisant à la condition de Lipschitz [1]). Les secondes conditions ajoutées aux premières permettent dans de nombreux cas de *localiser* la fonction f sur l'échelle logarithmico-puissance, c'est-à-dire de prouver que $f \in H(\delta, \gamma)$ pour certaines valeurs de δ, γ et que simultanément $f \in H^{\infty}(\delta, \gamma_1)$ pour tout $\gamma_1 < \gamma$. C'est grâce à cela qu'on a pu construire l'exemple universel donné plus haut.

La condition suffisante pour que $f \in H^{\infty}(\delta, \gamma)$, qui résulte de cette méthode, se compose de trois conditions. L'une d'elles

$$\lim_{n \to \infty} a_n b_n^{\delta} (\log b_n)^{-\gamma} = \infty \quad {}^{2})$$

ne permet pas dans le cas où $a_n = a^n$, $b_n = b^n$, $ab = 1$ de trancher si $f \in H^{\infty}(\delta, \gamma)$ ou non. Ceci a lieu aussi dans le cas de l'exemple de M. de Rahm. Si cependant on applique la méthode utilisée par M. de Rahm dans la démonstration de la non-dérivabilité de la fonction de son exemple, on arrive parfois à trancher la question.

C'est précisément cette méthode qui a été appliquée au § 2 dans le simple cas d'une fonction continue sans dérivée $f(x; \alpha, \beta)$ de la forme (14) où la fonction $\varphi(x)$ est définie par la relation (2). Selon la valeur des paramètres α, β, cette fonction parcourt toute l'échelle logarithmico-puissance. Ce cas comprend en particulier les exemples donnés par M. de Vito.

§ 1. Théorèmes Préliminaires

Lemme. S'il existe deux suites $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ telles que $\xi_n \to x_0$, $\eta_n \to y_0$, $\xi_n \leqslant x_0 \leqslant \eta_n$ pour tout n et on a

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{f(\eta_n) - f(\xi_n)}{\psi(\eta_n - \xi_n)} = \infty, \tag{9}$$

où $\psi(h)$ est une fonction définie et différente de zéro pour $h > 0$, non décroissante et tendant vers zéro lorsque $h \to 0$, la fonction $f(x)$ satisfait au point x_0 à la relation (4).

---

1) Cf. [4], p. 28, Theorem 10. C'est une généralisation du théorème de M. de Vito concernant la fonction de l'exemple de M. de Rahm.

2) Cf. [4] p. 27, formule (34).

Démonstration. Si ce lemme n'était pas vrai, il existerait deux constantes M, α telles que pour $|h| < \alpha$ et $x = x_0$ l'inégalité (5) aurait eu lieu. On aurait donc eu pour $n > n_0$

$$|f(\eta_n) - f(\xi_n)| \leqslant M\psi(\eta_n - x_0) + M\psi(x_0 - \xi_n) \leqslant 2M\psi(\eta_n - \xi_n)$$

ce qui contredit l'hypothèse (9).

A présent on formulera deux théorèmes sur la fonction $f(x)$ définie par (1), où la fonction $\varphi(x)$ est donnée par la relation (2) et les coefficients a_n, b_n vérifient les conditions (7), les nombres $\beta_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ étant des nombres pairs, $b_1 = 1$. Il est évident que la fonction $f(x)$ est une fonction continue.

Théorème 1. Si la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ est divergente, la fonction $f(x)$ satisfait dans l'ensemble Z dénombrable et dense de l'axe Ox à la relation (4) avec $\psi(h) = h$. La fonction $f(x)$ n'a donc pas de dérivée dans l'ensemble Z.

Démonstration. La fonction $\varphi(x)$ étant périodique, on se bornera à rapporter les raisonnements à l'intervalle $< 0,1 >$. Le graphique de la fonction

$$\varphi_n(x) = a_n \varphi(b_n x) \tag{10}$$

est une ligne brisée formant avec l'axe Ox des triangles adhérents dont la base a la longueur b_n^{-1} et dont les extrémités sont les zéros de la fonction $\varphi_n(x)$. Aux milieux des bases la fonction $\varphi_n(x)$ est maximum avec les valeurs $\frac{1}{2} a_n$. Les deux côtés des dits triangles ont comme les modules des coefficients angulaires les produits $a_n b_n$.

Désignons par n_0 une valeur établie de n et par x_0 un zéro choisi de la fonction $\varphi_{n_0}(x)$. Il est à remarquer que le nombre β_n étant pair, les points x_0 et $x_0 + b_{n_0}^{-1}$ sont des zéros de toute fonction $\varphi_k(x)$, où $k \geqslant n_0$. Il en résulte

$$\frac{\varphi_k(x_0 + b_{n_0}^{-1}) - \varphi_k(x_0)}{b_{n_0}^{-1}} = \begin{matrix} 0 & \text{pour} & k \geqslant n_0 \\ \alpha_k & \text{pour} & k < n_0 \, , \end{matrix}$$

où

$$|\alpha_k| = a_k b_k \tag{11}$$

et

$$\rho_{n_0} = \frac{f(x_0 + b_{n_0}^{-1}) - f(x_0)}{b_{n_0}^{-1}} = \sum_{k=1}^{n_0 - 1} \alpha_k \cdot \qquad (12)$$

x_0 étant établi, calculons pour $n > n_0$ la valeur du coefficient différentiel

$$\rho_n = \frac{f(x_0 + b_n^{-1}) - f(x_0)}{b_n^{-1}} = \rho_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k b_k \,. \qquad (13)$$

On en déduit que dans le cas où la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ diverge la fonction $f(x)$ vérifie au point x_0 la relation (4) avec $\psi(h) = h$. Ceci a lieu pour tout point de partage en b_n sous-intervalles égaux de l'intervalle $< 0{,}1 >$. En désignant par Z l'ensemble de ces points pour $n = 1, 2, \ldots$ et ceux qui leur correspondent dans le partage des intervalles $< p, p+1 >$ (p entier), la thèse du théorème se trouve démontrée.

Theorème 2. Si pour toute suite $\{\lambda_k\}$ où $|\lambda_k| = 1$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k b_k$ diverge [1]), la fonction $f(x)$ est de la classe $H^\infty(0, 1)$, c'est-à-dire elle n'a en aucun point de dérivée.

Démonstration. La démonstration est presque immédiate. Il suffit de substituer dans la formule (12) x_0 et $x_0 + b_{n_0}^{-1}$ respectivement par les deux extrémités de l'intervalle $< \xi_n, \eta_n >$, formé par le partage de l'intervalle $< 0, 1 >$ en b_{n_0} intervalles égaux, de remplacer n_0 par n et de choisir les intervalles $<\xi_n, \eta_n>$ de manière qu'ils contiennent un certain point x choisi arbitrairement. En s'appuyant sur le lemme avec $\psi(h) = h$, on aboutira à la proposition avancée.

Exemples. Le théorème 2 trouve des applications dans les cas suivants: *a)* $a_n = 10^{-n}$, $b_n = 2^{n!}$ (exemple de M. Faber); *b)* $a_n = a^n$, $b_n = b^n$, où $ab \geqslant 1$, $b > 0$ pair, $0 < a < 1$; *c)* $a_n = n^{-\alpha}$, $b_n = b^n$, $b > 0$ pair, $\alpha > 1$. Le théorème 2 n'est pas applicable lorsque $a_n = n^{-\alpha} b^{-n}$, $b_n = b^n$, $b > 0$ pair, $\alpha > 1$ mais on peut alors utiliser le théorème 1.

[1]) Cette hypothèse est équivalente à $\overline{\lim_{k \to \infty}}\, a_k b_k > 0$