

6. Formes quadratiques

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Cette théorie étudie l'arithmétique et l'algèbre des entiers définis à l'addition près d'un multiple d'un entier fixe p ; les relations obtenues sont appelées *congruences* suivant le module p . Les entiers, ainsi définis, ne déterminent qu'un nombre fini d'êtres, encore appelées classes de congruence.

Si l'entier p (caractéristique) est premier, l'ensemble des classes forme un corps, c'est-à-dire que les 4 opérations élémentaires sont possibles. Mais le polynôme $x^{p-1} - 1$ est nul pour toute valeur x du corps, sans être identiquement nul; plus généralement un polynôme $F(x^p)$ peut être irréductible et n'avoir que des racines multiples.

Dans une note assez brève, E. GALOIS complète ces résultats par l'introduction d'imaginaires. Il considère des êtres $f(i)$, définis suivant 2 modules p et $\varphi(i)$, où φ est un polynôme irréductible de degré f . Il obtient ainsi p^f êtres, ou imaginaires de Galois; toute équation de degré f à coefficients rationnels est décomposable.

DICKSON a montré que les ensembles d'imaginaires de Galois forment tous les *corps* qui ne contiennent qu'un *nombre fini d'éléments* (corps finis). L'étude de ces corps est indispensable pour la résolution des équations diophantiennes.

HENSEL a introduit des corps (infinis) — les corps locaux ou p -adiques — qui permettent d'utiliser les propriétés des congruences suivant les modules puissances de nombres premiers. Un tel corps est constitué par les séries formelles $(a_0 + a_1p + \dots)$, où les a_i sont des entiers définis au module p près.

Bibliographie: 2, 3, 9, 12, 13, 14, 15, 18, 27, 30, 37.

6. FORMES QUADRATIQUES

L'équation congruentielle:

$$x^2 - q \equiv 0 \pmod{p}$$

a été particulièrement étudiée à 2 points de vue différents: p étant donné, trouver les q (appelés restes quadratiques mod. p); q étant donné, trouvé les p .

La loi de réciprocité quadratique de GAUSS lie ces 2 points de vue.

Mais les diviseurs p de $x^2 - q$ sont les mêmes que ceux de $x^2 - qy^2$ (si ces diviseurs p sont sans facteurs carrés et premiers à q); cette dernière expression est un cas particulier d'une *forme quadratique binaire*

$$ax^2 + bxy + cy^2.$$

L'étude des formes quadratiques binaires a été débutée par GAUSS et continuée par HERMITE. On appelle formes *équivalentes* celles qui représentent les mêmes nombres; elles peuvent être déduites les unes des autres par des substitutions unimodulaires. Dans chaque classe de formes équivalentes, on cherche des formes *réduites*. Ces problèmes sont liés, en analyse, à l'étude des fonctions fuchsiennes.

L'étude des formes quadratiques à 3, 4, ... variables a donné lieu à de nombreux travaux, mais pose encore des problèmes importants. L'étude des formes de degré supérieur est seulement ébauchée.

L'étude des formes quadratiques binaires a été partiellement abandonnée et remplacée par celle des corps quadratiques, grâce à la relation:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (\alpha x + \beta y)(\alpha' x + \beta' y)$$

avec α, β nombres quadratiques.

Bibliographie: 15, 18, 21, 30, 34, 43.

7. APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES

Etant donné un nombre rationnel ou irrationnel, on peut chercher les fractions rationnelles à termes simples qui en diffèrent peu; c'est le problème des approximations diophantiennes.

La seule solution entièrement satisfaisante est celle des *fractions continues*. Il est remarquable qu'elle soit liée à la théorie des formes quadratiques binaires, du développement périodique des irrationnelles du second degré et aux substitutions unimodulaires.