I. RÔLE DES NOTIONS GEOMETRIQUES DANS LES PROBLÈMES D'ARITHMETIQUE,

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES[1])

par Claude CHABAUTY

I. RÔLE DES NOTIONS GÉOMÉTRIQUES DANS LES PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE.

Considérons les énoncés suivants:

(A). Si deux entiers sont chacun somme de deux carrés d'entiers, leur produit est aussi somme de deux carrés d'entiers.

(B). Soit d un nombre naturel non carré, l'équation $x^2 - dy^2 = 1$ admet une infinité de solutions en entiers x, y.

(C). Soit $ax^2 + 2bxy + cy^2$ une forme quadratique [à coefficients entiers], il existe un système d'entiers x, y, non tous deux nuls tels que

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)^2 \leqq \frac{4}{3}|ac - b^2| .$$

(D). Soit θ un nombre réel, il existe une infinité d'entiers x, y, $y \neq 0$, tels que

$$\left| \theta - \frac{x}{y} \right| \leqq \frac{1}{\sqrt{5}y^2} .$$

Les énoncés (A) et (B) sont purement algébriques (c'est-à-dire ne font intervenir que les lois de composition $+$ et $\times$ de l'anneau des entiers). L'énoncé (D), à l'opposé, a visiblement un caractère géométrique, puisqu'il fait intervenir le continu des nombres réels, mais l'énoncé (C) aussi, car il s'agit de démontrer une inégalité, c'est-à-dire une relation d'ordre, et non une relation algébrique. En outre, il s'agit en fait dans (C) d'une propriété valable pour les formes quadratiques binaires, à coefficients réels quelconques, et se restreindre aux coefficients entiers

---

[1]) Exposé fait durant les Journées mathématiques, organisées par la Société mathématique de France, à Grenoble, mai 1960.

ne simplifie en rien la démonstration. Remarquons que si on suppose la forme indéfinie on peut alors montrer que le coefficient $\frac{4}{3}$ peut être remplacé par le coefficient $\frac{4}{5}$, et que l'inégalité a une infinité de solutions entières. Il est clair que l'énoncé (D) est alors un corollaire de ce résultat sur les formes indéfinies que nous noterons (C′), puisque le discriminant de $y(x - \Theta y)$ est $-\frac{1}{4}$.

D'autre part, appliquons à la forme à coefficients entiers $x^2 - dy^2$ de (B), l'énoncé (C′). Il nous assure immédiatement l'existence d'un entier h, $h \neq 0$ parce que d n'est pas carré, tel que l'équation $x^2 - dy^2 = h$ ait une infinité de solutions en entiers x, y. Or un calcul élémentaire [1]) permet de construire à partir de telles solutions avec $x \equiv x'$ (mod h), $y \equiv y'$ (mod h), une solution en entiers à $x^2 - dy^2 = 1$.

L'énoncé algébrique (B) a donc une démonstration basée sur un énoncé (C′) à caractère géométrique et en fait c'est la démonstration la plus naturelle et la plus classique, à des variantes près. (La valeur de la constante, $\frac{4}{3}$, ou $\frac{1}{5}$, dans (C′) n'a pas d'importance pour cette démonstration de (B), ce qui compte c'est qu'il y ait une constante pour laquelle l'inégalité ait une infinité de solutions entières.)

Par contre, l'énoncé algébrique (A) a évidemment sa démonstration la plus simple et la plus naturelle à partir de l'identité bien connue: $(u^2+v^2)(u'^2+v'^2) = (uu'+vv')^2+(uv'-vu')^2$. Pour certains énoncés algébriques, il y a la possibilité de démonstrations algébriques et de démonstrations géométriques.

Dans cet exposé nous nous intéresserons aux problèmes d'arithmétique à caractère géométrique. On vient de voir sur un exemple [2]) que le champ de leurs applications comprend certains problèmes d'arithmétique dont l'énoncé a un caractère algébrique.

---

1) L'équation $(x+y\sqrt{d})(X+Y\sqrt{d}) = x'+y'\sqrt{d}$ définit des entiers X. Y avec $X^2 - dY^2 = 1$.

2) Plusieurs des théorèmes de base de la Théorie des Nombres algébriques ont été obtenus ainsi. Voir, par exemple, A. CHATELET: *Introduction à la théorie des nombres algébriques*, où l'aspect géométrique est souligné.