

# BERECHNUNG VON DURCH INTERPOLATION

Autor(en): **Krafft, Maximilian**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37975>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# BERECHNUNG VON $\pi$ DURCH INTERPOLATION

von Maximilian KRAFFT

(Reçu le 15 janvier 1962)

*Herrn J. E. Hofmann zum 7. März 1960 gewidmet.*

1. Zur numerischen Berechnung von  $\pi$  benutzt man, wenn man von den elementargeometrischen Verfahren absieht, so gut wie ausschliesslich Darstellungen der Funktion  $\operatorname{arctg} x$ , also entweder das diese Funktion definierende Integral für spezielle Werte der oberen Grenze, verbunden mit numerischer Integration, oder die aus dem Integral folgenden Reihenentwicklungen von Leibniz und Johann Bernoulli. Hier soll ein ganz andersartiges Verfahren zur Berechnung von  $\pi$  mitgeteilt werden, bei dem die numerische Rechnung auf ein Minimum zusammenschrumpft, sobald man nicht mehr als etwa zehn Dezimalen von  $\pi$  ermitteln will. Die Hilfsmittel sind ganz elementar. Wichtig ist, dass bei diesem Verfahren ein spezieller Fall einer allgemeinen für die Praktische Analysis nicht unwichtigen Frage auftritt, der anders wie der allgemeine Fall wirklich angreifbar ist und zu einer befriedigenden Antwort führt. Dies soll im Schlussabschnitt gezeigt werden.

2. Grundlegend für die weiteren Ausführungen ist, dass man die Werte von  $\sin x$  für gewisse  $x$  ( $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ) von vornherein kennt und die Werte für weitere  $x$  entweder durch Anwendung des Additionstheorems der Sinusfunktion (z.B. für  $15^\circ$  und  $75^\circ$ ) oder durch Auflösen einfacher quadratischer oder kubischer Gleichungen erhält. So sind z.B. die Lösungen von  $y^3 - 3y + 1 = 0$  gleich  $2 \sin 10^\circ$ ,  $2 \sin 50^\circ$ ,  $-2 \sin 70^\circ$ , die Lösungen von  $y^3 - 3y + \sqrt{3} = 0$  aber  $2 \sin 20^\circ$ ,  $2 \sin 40^\circ$ ,  $-2 \sin 80^\circ$ . Man kann sich also mit geringer Mühe die Ausgangsdaten auch dann mit der erforderlichen Genauigkeit verschaffen, wenn die zugänglichen Tafeln nicht ausreichen.

Die Argumente der Sinusfunktion sind hier in *Gradmass* gegeben. Es kann statt dessen auch jedes andere Winkelmass benutzt werden, das die Kenntnis des Zahlenwertes von  $\pi$  nicht erfordert. Ausgeschlossen ist jedes Winkelmass, das diese Kenntnis voraussetzt, also vor allem das analytische Bogenmass. Man kann nämlich das Folgende auch auffassen als ein Verfahren, das Bogenmass eines Winkels zu berechnen, der in einem der zugelassenen Masse gegeben ist.

Es sei  $n$  eine natürliche Zahl und  $0 < \alpha$ , aber  $n\alpha \leq 90^\circ$ . Dabei sei  $\alpha$  so gewählt, dass man die Werte aller  $\sin j\alpha$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) kennt oder sich die Werte leicht verschaffen kann. Dies ist z.B. der Fall, wenn man  $\sin \alpha$  (und damit auch  $\cos \alpha$ ) kennt, doch ist das nicht der günstigste Fall. Wir interpolieren nun  $\sin \alpha$  mit den  $2n + 1$  Stellen  $j\alpha$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ ). Der Einfachheit halber soll alles hergeleitet werden *ohne* Rückgriff auf die Theorie der Interpolation. Bemerkte sei nur, dass für uns die *Lagrangesche* Form des Interpolationspolynoms sich als zweckmässiger erweist als die anderen gebräuchlichen Formen. Die Voraussetzung  $n\alpha \leq 90^\circ$  ist eingeführt, weil damit die Abschätzung des Fehlergliedes erleichtert wird. Eine Verallgemeinerung unserer Grundannahmen erhält man, wenn man statt der Stellen  $j\alpha$  ( $0 \leq j \leq n$ ) *irgendwelche*  $\alpha_j$  wählt mit  $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 90^\circ$ . Das bietet weiter keine Schwierigkeiten, ist aber für die numerische Anwendung kaum zu empfehlen.

Wir beschränken uns bei unseren Darlegungen auf den Fall  $n = 3$ ; die Verallgemeinerung auf beliebiges  $n$  ist trivial. Da für uns  $x$  in der Umgebung von  $x = 0$  besonders wichtig sind, folgen wir den Gewohnheiten der Interpolationsrechnung und führen eine neue Veränderliche  $t$  ein durch

$$(2, 1) \quad x = \alpha t.$$

**3. Interpolationspolynom** für  $\sin x = \sin \alpha t$  mit den Interpolationsstellen  $j\alpha$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ) nennt man jedes Polynom, das für  $x = j\alpha$ , d.h. für alle  $t = j$ , mit  $\sin \alpha t$  wertegleich ist. Ein spezielles solches Polynom  $P(t)$  erhält man durch den Ansatz

$$(3, 1) \quad P(t) = t\{A_1(t^2 - 4)(t^2 - 9) + A_2(t^2 - 9)(t^2 - 1) + A_3(t^2 - 1)(t^2 - 4)\},$$

wobei  $A_1, A_2, A_3$  noch zu bestimmende Konstanten sind. Setzt man  $t = 1, 2, 3$ , so erhält man die Gleichungen

$$(3, 2) \quad \begin{aligned} \sin \alpha &= 24 A_1, & \sin 2\alpha &= -30 A_2, \\ \sin 3\alpha &= 120 A_3. \end{aligned}$$

Damit ist  $P(t)$  bekannt. Nun ist  $P(t)$  nicht das einzige Interpolationspolynom für  $\sin \alpha t$ , das zu den gegebenen Interpolationsstellen gehört. Es sei  $Q(t)$  irgend ein anderes solches Interpolationspolynom. Dann ist  $Q(t) - P(t)$  ein Polynom, das an allen Interpolationsstellen verschwindet, also die Gestalt  $t(t^2 - 1)(t^2 - 4)(t^2 - 9)p(t)$  haben muss, wobei  $p(t)$  irgendein Polynom sein muss. Das heisst alle Interpolationspolynome haben notwendig die Gestalt

$$(3, 3) \quad Q(t) = P(t) + t(t^2 - 1)(t^2 - 4)(t^2 - 9)p(t),$$

und umgekehrt ist jedes solche Polynom  $Q(t)$  auch ein Interpolationspolynom. Wir benutzen das für den Fall, dass  $p(t) = \text{const} = \rho$  ist, wobei wir über  $\rho$  später verfügen.

Die Funktion

$$(3, 4) \quad F(t) = \sin \alpha t - P(t) - t(t^2 - 1)(t^2 - 4)(t^2 - 9)\rho$$

ist für alle  $t$  erklärt, ungerade, unbeschränkt differenzierbar und verschwindet an allen Interpolationsstellen. Da die Gewohnheit besteht,  $\sin x$  und  $\cos x$  zu schreiben, gleichgültig in welchem Mass das  $x$  gemessen wird, die bekannten Ableitungsformeln für beide Funktionen aber nur gelten, wenn das  $x$  in Bogenmass gemessen wird, erhalten wir durch Anwendung der Kettenregel

$$(3, 5) \quad \frac{d \sin \alpha t}{dt} = \frac{\alpha \pi}{180} \cos \alpha t, \quad \frac{d \cos \alpha t}{dt} = -\frac{\alpha \pi}{180} \sin \alpha t.$$

Wir legen nun  $\rho$  fest durch die Forderung, dass  $F'(0) = 0$  sein soll. So erhalten wir aus (3,4)

$$(3, 6) \quad F'(0) = \frac{\alpha \pi}{180} - 36A_1 - 9A_2 - 4A_3 + 36\rho = 0$$



$$(4, 1) \quad \{II\} < \frac{9}{7\alpha} \left( \frac{4\alpha}{180} \right)^7 \leq \frac{9}{7 \cdot 30} \left( \frac{4 \cdot 30}{180} \right)^7 = \frac{3}{70} \left( \frac{2}{3} \right)^7 < 0,00251.$$

Wir können daher aus  $\{I\}$ , gleichgültig welchen Wert  $\alpha$  hat, sofort die beiden ersten Stellen von  $\pi$  entnehmen. Setzt man aber  $\alpha \leq 15^\circ$  voraus, so erhält man mit  $\pi \approx 3,2$  sofort  $\{II\} < < 8,3 \cdot 10^{-6}$ . Wir können daher bereits einen neuen Näherungswert für  $\pi$  aus  $\{I\}$  entnehmen, der mit einem Fehler von kleiner als  $1 \cdot 10^{-5}$  behaftet ist. Dabei ist dieser Fehler für die Genauigkeit, die wir erzielen können, unerheblich. Denn wenden wir die bekannten Regeln der Fehlerrechnung auf die oben eingeführte Funktion von  $\alpha$  und  $\xi$  an und setzen wir hintennach  $\xi = \pi$ , so finden wir, unter  $\Delta$  den Fehler des benutzten Näherungswertes für  $\pi$  verstanden, für  $\Delta \{II\}$  nämlich den Fehler von  $\{II\}$ ,

$$(4, 2) \quad \Delta \{II\} = \frac{7}{\pi} \{II\} \Delta.$$

Da in unserem Fall, wie schon die grobe Abschätzung von  $\{II\}$  zeigt,  $\{II\} < 10^{-5}$  und  $|\Delta| < 10^{-5}$  ist, ist  $|\Delta \{II\}| < < 2,4 \cdot 10^{-10}$ . Die Ungenauigkeit des zur Berechnung von  $\{II\}$  benutzten Wertes von  $\pi$  ist somit unerheblich, wenn wir nur auf acht Dezimalen rechnen.

Rechnet man mit  $\alpha = 15^\circ$ , so findet man aus

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

leicht auf neun Stellen genau

$$\{I\} = 3,141585524.$$

Mit Benutzung des oben ermittelten rohen Näherungswertes für  $\{II\}$  und der Fehlerrechnung sehen wir, dass man  $\{II\}$  mit  $\pi \approx 3,14159$  hinreichend genau berechnen kann. Dies ergibt  $\{II\} = 10^{-6} \cdot 7,225$ . Nach (3,11) ist daher

$$10^{-6} \cdot 5,108 = \{II\} \cos 45^\circ < \{II\} \cos \alpha < \{II\} = 10^{-6} \cdot 7,225$$

und

$$3,141590632 < \pi < 3,141592749.$$

Aus diesem Ergebnis sieht man sofort, welcher ungünstige Einfluss die unzureichende Bekanntschaft mit dem wahren Wert von  $\tau$  hat. Darüber wird noch ausführlicher zu handeln sein. Bemerken wir nur vorgreifend, dass, wie wir zeigen werden,  $\tau \approx 0,62$  ist und dass damit  $\cos \alpha\tau \approx 0,9874$ , also  $\{II\} \cos \alpha\tau \approx 10^{-6} \cdot 7,134$  ist. Das ergibt dann  $\pi \approx 3,141592658$  — einen Wert, von dem *acht* Dezimalen richtig sind.

5. Besitzt man das erwähnte Ergebnis nicht, so bleiben folgende Möglichkeiten,  $\pi$  genauer zu ermitteln: Einmal kann man bei  $n = 3$  bleiben, aber von  $\alpha = 15^\circ$  zu einem kleineren  $\alpha$ , etwa  $\alpha = 10^\circ$  oder  $\alpha = 5^\circ$ , übergehen. Dann wird nicht nur  $\{II\}$  erheblich kleiner, sondern auch die Schranken zwischen denen  $\cos \alpha\tau$  liegt, werden enger. Dem aber steht gegenüber, dass die Zahlenkoeffizienten der Sinuswerte in  $\{I\}$  wegen des  $\alpha$  im Nenner erheblich grösser werden, so dass man, um den Einfluss der Abrundungsfehler zu kompensieren, die drei Sinuswerte mit einer angemessenen Zahl von Stellen über die erstrebte Genauigkeit hinaus berechnen muss. Eine andere Möglichkeit ist, dass man bei  $\alpha = 15^\circ$  bleibt, aber  $n = 3$  durch  $n = 4$  ersetzt, also die neun Interpolationsstellen  $0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ$  benutzt. Dass in dem  $\{II\}$  entsprechenden Ausdruck der Exponent dann nicht mehr sieben, sondern neun ist, wird teilweise dadurch kompensiert, dass jetzt  $0 < \tau < 4$  ist. Bei der numerischen Rechnung liefert der  $\{I\}$  entsprechende Ausdruck sofort sechs richtige Stellen, da das Analogon von  $\{II\}$  ungefähr gleich  $10^{-7}$  ist. Zusammen erhält man wieder bei Abrundung  $\pi$  auf sieben Stellen.

Es gibt in der Analysis Darstellungen von Korrekturgliedern, denen gemeinsam ist, dass sie letzten Endes Abkömmlinge des *Rolleschen* Satzes sind. Dahin gehören die verschiedenen Formen des Restglieds der *Taylorformel*, das *Cauchysche* Restglied bei der Interpolation, die Korrekturglieder bei den Quadraturformeln wie der *Simpsonschen* Regel und auch das Glied  $\{II\} \cos \alpha\tau$  in (3,10). In allen diesen Darstellungen tritt eine Zahl, die wir  $\tau$  nennen wollen, auf, von der nur feststeht, dass sie existiert und einem bekannten Intervall angehört. Will man nun eine solche Darstellung eines Korrekturgliedes beim praktischen Rechnen

verwenden, so bleibt nichts übrig, als für das Glied eine obere und eine untere Schranke zu ermitteln. Die Differenz dieser Schranken ist im allgemeinen unangenehm gross; eine Verbesserung wäre nur möglich, wenn es gelänge, das Intervall, in dem  $\tau$  liegen muss, ohne Abänderung der anderen Daten erheblich zu verkürzen. Der Versuch, eine solche Verkürzung wenigstens in einem oder anderem wichtigen Fall anzugeben, scheint noch nicht ernsthaft unternommen zu sein. Er kann natürlich nur gelingen unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Funktion, in deren Argument  $\tau$  auftritt. Darunter wird wohl immer die Forderung enthalten sein, dass diese Funktion monoton im strengen Sinn ist, da dann gesichert ist, dass es nur ein einziges brauchbares  $\tau$  gibt (i. a. wird es mehrere geben). Unter diesen Umständen ist es wohl nützlich, dass wir zeigen können, wie sich mit ganz einfachen Mitteln das  $\tau$  unserer Formel (3,8) ohne zusätzliche Annahmen ziemlich scharf eingrenzen lässt.

6. Hilfsmittel ist neben den zu den elementaren Vorkenntnissen gehörenden Potenzreihen für  $\sin x$  und  $\cos x$ , die wir nur für kleine Argumente gebrauchen, und der aus den früheren Ergebnissen zu entnehmenden Ungleichung  $\pi < 3,15$ , die  $\pi^2 < 10$  ergibt, eine triviale Aussage über unendliche Reihen:  
Sind in der konvergenten Reihe

$$(6, 1) \quad s = \sum_0^{\infty} (-1)^{\nu} a_{\nu} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

alle  $a_{\nu} > 0$  und ist weiter  $a_{\nu} - a_{\nu+1} > 0$  für  $\nu \geq 2$ , so ist

$$(6, 2) \quad a_0 - a_1 < s < a_0 - a_1 + a_2.$$

Wir schreiben jetzt (3,10) unter Benutzung der Abkürzung  $\beta = \alpha\tau$  in der Gestalt

$$(6, 3) \quad \cos \alpha\tau = \cos \beta = \frac{\pi - \{I\}}{\{II\}}.$$

Statt des Gradmasses für  $\alpha$  führen wir das Bogenmass ein. Es ist wohl kein Irrtum zu befürchten, wenn wir auch dieses mit  $\alpha$  bezeichnen. Dann lässt sich die Gleichung für  $\cos \beta$  so schreiben:



$$(6, 4) \quad \cos \alpha\tau = \cos \beta = \frac{140\alpha - 210 \sin \alpha + 42 \sin 2\alpha - \frac{14}{3} \sin 3\alpha}{\alpha^7}.$$

Hier entwickeln wir rechts den Zähler unter Benutzung der Sinusreihe nach Potenzen von  $\alpha$ . Diese Entwicklung beginnt notwendig mit  $1 \cdot \alpha^7 + \dots$ , weil aus  $0 < \beta < 3\alpha$  folgt:  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \beta = 1$ .

Man kann dies natürlich auch durch Ausrechnen der ersten Koeffizienten der Zählerreihe bestätigen. Da auf der rechten Seite von (6,4) eine gerade Funktion von  $\alpha$  steht, kann man (6,4) jetzt in der Form schreiben

$$(6, 5) \quad \cos \alpha\tau = \cos \beta = \sum_0^{\infty} (-1)^\mu \frac{B_\mu}{(2\mu)!} \alpha^{2\mu}.$$

Dabei ist

$$(6, 6) \quad B_\mu = \frac{(2\mu)!}{(2\mu+7)!} \cdot 42(5 - 2^{2\mu+7} + 3^{2\mu+5}).$$

Insbesondere wird

$$(6, 7) \quad B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{7}{18}, \quad B_2 = \frac{49}{110}.$$

Es sind notwendig alle  $B_\mu > 0$ ; denn

$$(6, 8) \quad 5 - 2^{2\mu+7} + 3^{2\mu+5} > 3^{2\mu+5} - 3^{2\mu} \cdot 2^7 = 3^{2\mu}(3^5 - 2^7) > 0.$$

Ferner ist, wenn  $C_\mu$  eine von  $\alpha$  und  $\mu$  abhängige positive Zahl bedeutet, deren Wert weiter nicht von Belang ist, und  $\alpha \leq \frac{\pi}{6}$ ,

also  $\alpha^2 < \frac{10}{36} < 1$  benutzt wird

$$(6, 9) \quad \frac{B_\mu \alpha^{2\mu}}{(2\mu)!} - \frac{B_{\mu+1} \alpha^{2\mu+2}}{(2\mu+2)!} = C_\mu ((2\mu+8)(2\mu+9) \cdot (5 - 2^{2\mu+7} + 3^{2\mu+5}) - \alpha^2 (5 - 2^{2\mu+9} + 3^{2\mu+7})) \\ > C_\mu (8 \cdot 9 (5 - 2^{2\mu+7} + 3^{2\mu+5}) - (5 - 2^{2\mu+9} + 3^{2\mu+7})) \\ > C_\mu (7 \cdot 3^{2\mu+7} - 17 \cdot 2^{2\mu+9}) > C_\mu (7 \cdot 3^6 - 17 \cdot 2^8) \cdot 2^{2\mu+1} > 0.$$

Der oben angegebene Reihensatz (6,2) ist somit verwendbar und ergibt

$$(6, 10) \quad 1 - \frac{B_1 \alpha^2}{2} < \cos \beta < 1 - \frac{B_1 \alpha^2}{2} + \frac{B_2 \alpha^4}{24}.$$

Da aus  $\beta < 3\alpha \leq \frac{\pi}{2}$  folgt  $\beta^2 < \frac{10}{4}$ , so kann man auch auf die Potenzreihe für  $\cos \beta$  unseren Reihensatz anwenden. Dies ergibt

$$(6, 11) \quad 1 - \frac{\beta^2}{2} < \cos \beta < 1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24}.$$

Damit haben wir die beiden Ungleichungen erhalten

$$(6, 12) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{\beta^2}{2} < \cos \beta < 1 - \frac{B_1 \alpha^2}{2} + \frac{B_2 \alpha^4}{24}, \\ 1 - \frac{B_1 \alpha^2}{2} < \cos \beta < 1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24}, \end{array} \right.$$

das heisst

$$(6, 13) \quad \beta^2 > B_1 \alpha^2 - \frac{B_2 \alpha^4}{12}, \quad B_1 \alpha^2 > \beta^2 - \frac{\beta^4}{12}.$$

Wegen  $\alpha^2 \leq \frac{\pi^2}{36} < \frac{10}{36}$  ergibt sich mit den bekannten Werten von  $B_1$  und  $B_2$  aus der ersten Ungleichung (6,13)

$$(6, 14) \quad \beta^2 > \frac{7}{18} \left( 1 - \frac{7 \cdot 18 \cdot 10}{12 \cdot 110 \cdot 36} \right) \alpha^2 = \frac{7}{18} \left( 1 - \frac{7}{264} \right) \alpha^2 = \frac{1799}{4752} \alpha^2$$

und damit

$$(6, 15) \quad \beta > 0,6152\alpha.$$

Da bis jetzt nur  $\beta < 3\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , also  $\beta^2 < \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$  bekannt ist, kann man der zweiten Ungleichung (6,13)

$$(6, 16) \quad \beta^2 \left( 1 - \frac{\beta^2}{12} \right) < B_1 \alpha^2 = \frac{7}{18} \alpha^2$$

zunächst nur

$$(6, 17) \quad \frac{19}{24} \beta^2 < \frac{7}{18} \alpha^2, \quad \text{d. h.} \quad \beta^2 < \frac{7 \cdot 24}{18 \cdot 19} \alpha^2 = \frac{28}{57} \alpha^2$$

entnehmen. Zusammen mit  $\alpha \leq \frac{\pi}{6}$ , also  $\alpha^2 < \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ , folgt

weiter  $\beta^2 < \frac{70}{513}$ . Benutzen wir das in der zweiten Ungleichung

(6,13), so erhalten wir

$$(6, 18) \quad \beta^2 \left( 1 - \frac{35}{3078} \right) < \frac{7}{18} \alpha^2$$

oder

$$(6, 19) \quad \beta^2 < \frac{7}{18} \cdot \frac{3078}{3043} \alpha^2 = \frac{1197}{3043} \alpha^2.$$

Nochmalige Anwendung dieser Schlussweise ergibt dann

$$(6, 20) \quad \beta < 0,62418\alpha.$$

Das Endergebnis

$$(6, 21) \quad 0,6152 < \tau < 0,6242$$

kann man mit genügender Annäherung auch formulieren:

$$(6, 22) \quad \tau \approx 0,62.$$

Die ermittelten Schranken kann man verengen, wenn man die Voraussetzung  $\alpha \leq 30^\circ$  (in Bogenmass  $\alpha \leq \frac{\pi}{6}$ ), durch eine schärfere Vorschrift über  $\alpha$ , z.B.  $\alpha \leq 15^\circ$  ( $\alpha \leq \frac{\pi}{12}$ ) ersetzt. Wichtig wäre es auch, die Abhängigkeit des  $\tau$  von der Zahl  $2n + 1$  der Interpolationsstellen zu untersuchen oder andere angreifbare Fragen aus dem gleichen Problemkreis zu betrachten.

Prof. Dr. M. Krafft  
Kaffweg 9a.  
Marburg/Lahn  
Deutschland.