

AN EXTENSION OF A THEOREM OF DARBOUX

Autor(en): **Goodner, Dwight B.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37135>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

AN EXTENSION OF A THEOREM OF DARBOUX

by Dwight B. GOODNER

(Reçu le 10 novembre 1960)

Darboux's intermediate value theorem for derivatives [1, p. 117] requires the existence of the derivative. Since the derivative may fail to exist, it seems desirable to have expressions which may serve us when there is no derivative. The purpose of this paper is to extend Darboux's theorem to functions which have finite one-sided "Dini derivates".

Let f be a function defined on the closed interval $a \leq x \leq b$. We will denote the upper right, lower right, upper left, and lower left derivates of f [2, p. 188] on $a \leq x \leq b$ by $D^+ f$, $D_+ f$, $D^- f$, and $D_- f$, respectively. In addition, if p and q are real numbers, we will use

$$pD(+)f + qD(-)f$$

to denote any one of the relations

$$\begin{aligned} p_1 D^+ f + q_1 D^- f, \\ p_2 D^+ f + q_2 D_- f, \\ p_3 D_+ f + q_3 D^- f, \\ p_4 D_+ f + q_4 D_- f, \end{aligned}$$

Theorem. If the function f is continuous on the closed interval $a \leq x \leq b$, if f has finite derivates at each point of the open interval $a < x < b$, and if k is a real number such that $D_+ f(a) < k < D^- f(b)$, then there exist numbers ξ , p , and q with $a < \xi < b$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, and $p + q = 1$ such that

$$pD(+)f(\xi) + qD(-)f(\xi) = k$$

Proof. To avoid unnecessary repetition we will prove the theorem for only one possible choice of derivates. The relations for other choices can be similarly proved.

Let the function F be defined on $a \leq x \leq b$ by $F(x) = f(x) - kx$. Then [2, p. 191]

$$D^- F(b) = D^- f(b) - k > 0 \text{ and } D_+ F(a) = D_+ f(a) - k < 0.$$

Hence there is a point ξ , $a < \xi < b$, such that F has a minimum at ξ . We note that $D^+ F(\xi) D^- F(\xi) \leq 0$. If $D^+ F(\xi) = 0$, we choose $p = 1$ and $q = 0$. If $D^+ F(\xi) \neq 0$, we choose

$$p = \frac{D^- F(\xi)}{D^- F(\xi) - D^+ F(\xi)} \text{ and } q = \frac{D^+ F(\xi)}{D^+ F(\xi) - D^- F(\xi)}.$$

In either case $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$, and $p D^+ F(\xi) + q D^- F(\xi) = 0$. Hence

$$p [D^+ f(\xi) - k] + q [D^- f(\xi) - k] = 0.$$

It follows that

$$p D^+ f(\xi) + q D^- f(\xi) = k$$

which was to be shown.

The reader will observe that we have not required the derivatives at a and b to be finite. In fact, we need not require that all derivatives be finite at each point of the open interval $a < x < b$. However, since these cases are easily resolved, they will be left for the consideration of the reader.

A closely related theorem may be obtained by substituting $D^+ f(a) > k > D^- f(b)$ for $D_+ f(a) < k < D^- f(b)$ in the statement of our theorem. A proof of the new theorem can be obtained by making minor modifications in the above proof.

REFERENCES

1. GOFFMAN, C., *Real Functions*. New York, Rinehart and Company, 1953.
2. McSHANE, E. J., *Integration*. Princeton, Princeton University Press, 1944.

Department of Mathematics
The Florida State University
Tallahassee, U.S.A.