45. Multiplicateurs d'un cycle d'idéaux semi réduits.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

racine finale. Les côtés orientés de la ligne indiquent les passages d'un idéal à son suivant. (Pour la clarté des figures, on a consacré deux graphiques, chacun à deux cycles.)

Un *idéal double*, qui est le suivant d'un idéal, de même racine finale, est représenté par l'extrémité d'un côté, parallèle à l'axe des normes. Un *idéal réfléchi*, qui a la même norme que son suivant, est représenté par l'origine d'un côté, parallèle à l'axe des racines. On peut encore remarquer que les idéaux suivant et précédent d'un idéal double ont des normes égales; les sommets voisins (précédent et suivant) du sommet représentatif sont sur une même parallèle à l'axe des racines.

45. Multiplicateurs d'un cycle d'idéaux semi réduits.

On peut exprimer les relations de congruence entre les idéaux d'un cycle, en utilisant une suite d'éléments du corps, dont les termes se reproduisent en progressions géométriques.

Définition. — Relativement à un cycle d'idéaux semi réduits:

$$\mathbf{M}_i = (m_i, \theta - c_i); \qquad i, \quad \text{mod. } h;$$

on appelle **multiplicateurs** *une suite*, doublement illimitée, *d'éléments* ρ_i *du corps*, *vérifiant la relation de récurrence:*

$$(\theta - c_i) \times \rho_i = m_{i+1} \times \rho_{i+1}; \qquad i \text{ entier quelconque};$$

dont les coefficients sont, avec une transposition, ceux de la relation de récurrence entre les idéaux du cycle.

On convient, en outre, de prendre $\rho_0 = 1$, ce qui revient à distinguer, plus spécialement l'idéal $\mathbf{M}_0$, affecté de l'indice nul, dans le cycle.

De cette construction, on déduit l'expression des multiplicateurs au moyen de l'un d'entre eux (notamment de ρ_0):

$$\left.\begin{aligned} \rho_{r+\lambda} &= \rho_r \times [\Pi(\theta - c_{i-1})] : [\Pi m_i]; \quad i \text{ de } r+1 \text{ à } r+\lambda; \\ \rho_{r-\lambda} &= \rho_r \times [\Pi m_{i+1}] : [\Pi(\theta - c_i)]; \quad i \text{ de } r-\lambda \text{ à } r-1; \end{aligned}\right\} \lambda \text{ entier positif.}$$

En particulier, on obtient ρ_λ et $\rho_{-\lambda}$, en prenant r nul et $\rho_0 = 1$. On aurait pu, plus généralement, choisir arbitrairement la valeur d'un des multiplicateurs ρ_r, toutefois égale à un élément du corps.

La périodicité des coefficients $\theta - c_i$ et m_i (i défini mod. h) entraîne une répartition en h progressions géométriques des multiplicateurs ρ_i; (ou une périodicité de multiplication):

Théorème de la périodicité de multiplication. — *Pour des indices en progression arithmétique, de raison h* (nombre d'éléments du cycle), *les multiplicateurs forment une progression géométrique*, dont la raison est un élément ω, du corps:

$$\rho_{r+\mu h} = \rho_r \times \omega^\mu; \qquad \omega = [\Pi(\theta - c_j)] : [\Pi m_j]; \quad j \text{ de } 0 \text{ à } h-1;$$

μ entier quelconque.

En remplaçant λ par h, dans l'expression des multiplicateurs, au moyen de ρ_r, on obtient:

$$\rho_{r+h} = \rho_r \times \omega; \qquad \omega = [\Pi(\theta - c_{i-1})] : [\Pi m_i]; \quad i \text{ de } r+1 \text{ à } r+h.$$

Mais, en raison de la périodicité de c_i et de m_i, les deux produits $\Pi(\theta - c_j)$, et Πm_j ont des valeurs déterminées, quand j prend h valeurs entières successives quelconques, ce qui est le cas pour les deux termes du quotient précédent; sa valeur ω est donc indépendante de r et notamment est égale à l'expression de l'énoncé du théorème.

L'expression de $\rho_{r+\mu h}$ s'en déduit immédiatement, par récurrence sur μ (positif ou négatif).

La relation entre multiplicateurs et idéaux du cycle est alors exprimée par l'égalité:

le produit $\rho_i \times \mathbf{M}_i$, ou $(\rho_i) \times \mathbf{M}_i$, de chaque idéal $\mathbf{M}_i$, du cycle par le multiplicateur ρ_i, de même indice (défini, mod. h), ou par l'idéal principal (ρ_i) qui a ce multiplicateur pour base, *est égal à l'idéal* $\mathbf{M}_0$ *d'indice nul* (on a convenu $\rho_0 = 1$):

$$\rho_i \times \mathbf{M}_i \quad \text{ou} \quad (\rho_i) \times \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_0.$$

Il est équivalent de dire que l'idéal $(\rho_i) \times \mathbf{M}_i$ est un idéal invariant dont une expression est notamment $(1) \times \mathbf{M}_0$. On peut vérifier d'abord cette invariance lorsque i est remplacé par $i+1$. Elle résulte du rapprochement des deux relations de récurrence, entre les idéaux et entre les multiplicateurs, qu'on peut remplacer par les idéaux principaux qui les ont pour bases:

$$(m_{i+1})\times\mathbf{M}_i = (\theta-c_i)\times\mathbf{M}_{i+1}; \qquad (\rho_i)\times(\theta-c_i) = (\rho_{i+1})\times(m_{i+1});$$

en les multipliant membre à membre, puis en divisant par le produit des idéaux principaux $(m_{i+1})\times(\theta-c_i)$, qui n'est pas nul, on obtient:

$$(\rho_i)\times\mathbf{M}_i = (\rho_{i+1})\times\mathbf{M}_{i+1}.$$

La relation s'étend au remplacement de i par $i+\lambda$, par récurrence sur λ entier quelconque.

Si ρ_r (au lieu de ρ_0) était choisi égal à un élément γ du corps, la valeur commune des idéaux $(\rho_i)\times\mathbf{M}_i$ serait $(\gamma)\times\mathbf{M}_r$.

On déduit encore de cette propriété que les produits d'un idéal $\mathbf{M}_i$ par tous les multiplicateurs, d'indice $i+\lambda h$, sont égaux; notamment:

$$\mathbf{M}_0 = (\rho_{\lambda h})\times\mathbf{M}_0 = (\omega^\lambda)\times\mathbf{M}_0$$

Théorème des diviseurs de l'unité (I). — *Les puissances et leurs opposés*, $\pm\omega^\lambda$, de l'élément ω construit au moyen des idéaux $(m_j,\ \theta-c_j)$, semi réduits d'un cycle:

$$\omega = [\Pi(\theta-c_j)]:[\Pi m_j]; \quad j \text{ de } 0 \text{ à } h-1; \quad \lambda \text{ entier};$$

sont des diviseurs de l'unité du corps (**3**).

L'égalité de $\mathbf{M}_0$ et de son produit par l'idéal principal (ω^λ), exige que cet idéal soit égal à l'idéal unité (**14**) et par suite que sa base ω^λ, et l'opposé $-\omega^\lambda$ soient des diviseurs de l'unité du corps (**11**).

On montre ci-dessous que, réciproquement, tous les diviseurs de l'unité du corps sont obtenus ainsi; il en résulte notamment que les valeurs de $\pm\,\omega$, sont les mêmes pour chacun des cycles d'idéaux semi réduits, (**48**).

Exemples. — Dans le corps de discriminant 145 (tableau XXII), les idéaux semi réduits, du cycle engendré par l'idéal unité peuvent être affectés des indices (i, mod. 3):

$$\mathbf{M}_0 = (1,\ \theta-5); \quad \mathbf{M}_1 = (6,\ \theta); \quad \mathbf{M}_2 = (6,\ \theta-5);$$

les racines étant, bien entendu finales. Les multiplicateurs sont:

$$\rho_0 = 1; \ \ \rho_1 = (\theta-5):6; \ \ \rho_2 = \rho_1\times(\theta:6) = (\theta-5)\times\theta:36 = (-\theta+6):6$$

Les autres multiplicateurs sont des produits de ceux là par des puissances de $\omega = \rho_3$, qui est égal à:

$$\omega = \rho_3 = \rho_2 \times (\theta - 5) : 1 = (-\theta + 6) \times (\theta - 5) : 6 = 2\theta - 11.$$

On vérifie aisément que ω et, par suite ses puissances et leurs opposées sont des diviseurs de l'unité; il suffit de calculer la norme de ω:

$$N(\omega) = \omega \times \omega' = (2\theta - 11) \times (2\theta' - 11) = -4 \times 36 + 22 + 121 = -1.$$

Pour le cycle de 5 idéaux:

$$\mathbf{M}_0 = (5,\ \theta - 2),\quad \mathbf{M}_1 = (6,\ \theta - 3),\quad \mathbf{M}_2 = (4,\ \theta - 4),$$
$$\mathbf{M}_3 = (4,\ \theta - 3),\quad \mathbf{M}_4 = (6,\ \theta - 2);$$

les multiplicateurs sont:

$$\rho_0 = 1,\quad \rho_1 = (\theta - 2) : 6,\quad \rho_2 = (-\theta + 7) : 4,\quad \rho_3 = (3\theta - 16) : 4,$$
$$\rho_4 = (-7\theta + 39) : 6;\ \omega = \rho_5 = 2\theta - 11.$$

On retrouve la valeur précédente.

Dans le cas d'un cycle d'un seul idéal $(1,\ \theta - c)$, les multiplicateurs sont les puissances de:

$$\omega = \rho_1 = (\theta - c);$$

cet élément est d'ailleurs manifestement un diviseur de l'unité:

$$(\theta - c) \times (\theta' - c) = F(c) = -1.$$

46. Suite de bases d'un idéal semi réduit.

A un cycle d'idéaux semi réduits $\mathbf{M}_i$ auquel est associé une suite de multiplicateurs ρ_i, on peut aussi associer une suite de bases, arithmétiques libres de l'idéal $\mathbf{M}_0$ (qui peut être choisi arbitrairement dans le cycle, ou même être remplacé par un idéal $(\gamma) \times \mathbf{M}_r$).

Théorème de la suite des bases. — *Dans l'idéal* $\mathbf{M}_0$, d'un cycle d'idéaux semi réduits $\mathbf{M}_i = (m_i,\ \theta - c_i)$, *on peut construire une suite*, doublement illimitée, d'*éléments* α_i (entiers de $\mathbf{M}_0$), par les relations:

$$\alpha_i = m_i \times \rho_i = (\theta - c_{i-1}) \times \rho_{i-1};$$
$$\alpha_{i+1} = m_{i+1} \times \rho_{i+1} = (\theta - c_i) \times \rho_i;$$