

29. Successions de nombres premiers.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **17.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

29. Successions de nombres premiers.

Dans le deuxième exemple traité, les quinze premières valeurs de $|F(x)|$ sont des nombres premiers ou des doubles de nombres premiers. Cette particularité tient à ce que les valeurs de $|F(x)|$ pour $x < r$, sont des nombres premiers relativement grands, qui ne se retrouvent, par suite, dans la table, qu'à des rangs relativement éloignés. Il existe d'autres exemples de ce même phénomène.

Un exemple (bien connu, au moins depuis Euler) est constitué par les valeurs du trinôme (à discriminant D négatif):

$$F(x) = x^2 + x + 41; \quad D = -163.$$

Le tableau VII en donne les valeurs pour les valeurs entières de x , de 0 à 299; pour celles qui ne sont pas des nombres premiers, on a seulement inscrit leur décomposition en facteurs premiers.

Les quarantes premières valeurs de $F(x)$ sont des nombres premiers.

Le rang r est égal à 4; les quatre premières valeurs sont les nombres premiers:

$$41, \quad 43, \quad 47, \quad 53.$$

Ils ne se retrouvent comme facteurs qu'au-delà de $x = 39$. On peut montrer par récurrence sur c , compris entre 4 et 39 inclus, que $F(c)$ est un nombre premier, de racine minimum égale à c . Car, il en est ainsi pour $F(4)$, et, par hypothèse de récurrence, pour toute valeur $F(x)$, x étant compris entre 0 inclus et c exclus; en outre la racine conjuguée du nombre premier $F(x)$ est supérieure à 39, puisque

$$F(x) - x - 1 = x^2 + 40 \geq 40.$$

Il s'en suit que $F(c)$ ne peut être divisible par aucun des nombres premiers $F(x)$, il est donc premier et de racine minimum c .

A l'exclusion des sept décompositions:

$$\begin{aligned} F(40) &= 41^2, & F(41) &= 41 \times 43, & F(44) &= 43 \times 47, \\ F(49) &= 47 \times 53, & F(56) &= 53 \times 61, & F(65) &= 61 \times 71, \\ F(76) &= 71 \times 83 \end{aligned}$$

les valeurs de $F(40)$ à $F(80)$, sont des nombres premiers (soient 34 nombres premiers nouveaux).

TABLEAU VII.

$$F(x) = x^2 + x + 41; \text{ discriminant: } -163; r = 4.$$

x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
0	41	42	1 847	84	43×167	126	61×263
1	43	43	1 933	85	7 351	127	43×379
2	47	44	43×47	86	7 523	128	16 553
3	53	45	2 111	87	43×179	129	16 811
4	61	46	2 203	88	7 873	130	43×397
5	71	47	2 297	89	83×97	131	17 333
6	83	48	2 393	90	8 231	132	17 597
7	97	49	47×53	91	47×179	133	17 863
8	113	50	2 591	92	8 597	134	18 131
9	131	51	2 693	93	8 783	135	18 401
10	151	52	2 797	94	8 971	136	71×263
11	173	53	2 903	95	9 161	137	18 947
12	197	54	3 011	96	47×199	138	47×409
13	223	55	3 121	97	9 547	139	19 501
14	251	56	53×61	98	9 743	140	131×151
15	281	57	3 347	99	9 941	141	20 063
16	313	58	3 463	100	10 141	142	20 347
17	347	59	3 581	101	10 343	143	47×439
18	383	60	3 701	102	53×199	144	20 921
19	421	61	3 823	103	10 753	145	21 211
20	461	62	3 947	104	97×113	146	21 503
21	503	63	4 073	105	11 171	147	71×307
22	547	64	4 201	106	11 383	148	22 093
23	593	65	61×71	107	11 597	149	22 391
24	641	66	4 463	108	11 813	150	22 691
25	691	67	4 597	109	53×227	151	22 993
26	743	68	4 733	110	12 251	152	23 297
27	797	69	4 871	111	12 473	153	23 603
28	853	70	5 011	112	12 697	154	23 911
29	911	71	5 153	113	12 923	155	53×457
30	971	72	5 297	114	13 151	156	24 533
31	1 033	73	5 443	115	13 381	157	24 847
32	1 097	74	5 591	116	13 613	158	25 163
33	1 163	75	5 741	117	61×227	159	83×307
34	1 231	76	71×83	118	14 083	160	25 801
35	1 301	77	6 047	119	14 321	161	151×173
36	1 373	78	6 203	120	14 561	162	53×499
37	1 447	79	6 361	121	113×131	163	41×653
38	1 523	80	6 521	122	41×367	164	41×661
39	1 601	81	41×163	123	41×373	165	27 431
40	41^2	82	41×167	124	15 541	166	27 763
41	41×43	83	7 013	125	15 791	167	28 097

TABLEAU VII. (*suite*).

x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
168	28 433	201	97×419	234	113×487	267	71 597
169	28 771	202	41 047	235	55 501	268	$53 \times 1\,361$
170	43×677	203	41 453	236	223×251	269	72 671
171	29 453	204	$41 \times 1\,021$	237	$47 \times 1\,201$	270	179×409
172	83×359	205	$41 \times 1\,031$	238	56 923	271	131×563
173	43×701	206	42 683	239	61×941	272	74 297
174	30 491	207	71×607	240	57 881	273	74 843
175	30 841	208	53×821	241	58 363	274	75 391
176	31 193	209	197×223	242	83×709	275	75 941
177	31 547	210	44 351	243	59 333	276	76 493
178	61×523	211	44 773	244	163×367	277	77 047
179	32 261	212	45 197	245	$41 \times 1\,471$	278	$71 \times 1\,093$
180	32 621	213	$43 \times 1\,061$	246	$41 \times 1\,483$	279	$47 \times 1\,663$
181	32 983	214	46 051	247	61 297	280	78 721
182	33 347	215	53×877	248	$61 \times 1\,013$	281	79 283
183	33 713	216	$43 \times 1\,091$	249	167×373	282	79 847
184	173×197	217	113×419	250	62 791	283	97×829
185	47×733	218	71×673	251	167×379	284	$47 \times 1\,723$
186	97×359	219	48 221	252	131×487	285	81 551
187	61×577	220	48 661	253	64 303	286	$41 \times 2\,003$
188	35 573	221	49 103	254	64 811	287	$41 \times 2\,017$
189	35 951	222	49 547	255	83×787	288	83 273
190	47×773	223	49 993	256	$43 \times 1\,531$	289	$71 \times 1\,181$
191	36 713	224	50 441	257	66 347	290	84 431
192	37 097	225	50 891	258	66 863	291	151×563
193	37 483	226	51 343	259	$43 \times 1\,567$	292	85 597
194	37 871	227	51 797	260	67 901	293	86 183
195	38 261	228	52 253	261	$53 \times 1\,291$	294	86 771
196	38 653	229	52 711	262	68 947	295	199×439
197	39 047	230	53 171	263	69 473	296	281×313
198	39 443	231	53 633	264	70 001	297	88 547
199	39 841	232	$47 \times 1\,151$	265	251×281	298	97×919
200	40 241	233	54 563	266	179×397	299	$43 \times 2\,087$

Au-delà de $F(40)$, on inscrit les premiers nombres premiers de la table devant les valeurs qu'ils divisent, on obtient les sept décompositions indiquées; puis $F(81) = 41 \times 163$, qui comporte un diviseur premier non encore obtenu, ou de racine minimum 81.

A toute valeur $F(c)$, pour c compris entre 7 et 80 inclus, exception faite des valeurs de décomposition, on peut appliquer le raisonnement de récurrence précédent. Tout $F(x)$, de $F(6)$ à $F(c)$ exclus, étant

supposé premier, de racine minimum x , sa racine conjuguée est supérieure à 81, car :

$$F(x) - x - 1 = x^2 + 40 \geq 49 + 40 = 89.$$

Il ne divise donc pas $F(c)$, qui n'étant pas divisible par les valeurs de $F(0)$ à $F(6)$ est un nombre premier de racine minimum c .

Pour toutes les valeurs de x , au-delà de 80 et telles que :

$$F(x) \leq (2 \times 80 + 1)^2 \Rightarrow x \leq 161,$$

les quotients obtenus (après division éventuelle par les monômes des nombres premiers précédents, qui peuvent être limités aux douze premiers), sont des nombres premiers ou sont égaux à 1.

Certains sont diviseurs de valeurs ultérieures du tableau concurremment avec des nombres premiers déjà trouvés. On les inscrit et on forme les quotients qui sont tous premiers ou égaux à 1, dans la limite de la table, dont les valeurs restantes sont inférieures à $(2 \times 161 + 1)^2$.

On a indiqué, en caractère gras, les nombres premiers obtenus comme facteur d'une décomposition effective. Leur fréquence augmente naturellement, dans le prolongement de la table. On peut même trouver une suite de valeurs $F(x)$, en nombre H , arbitrairement grand, dont aucune ne soit un nombre premier.

Il suffit de prendre x compris entre P et $P+H$, le nombre P étant le produit des facteurs premiers qui divisent les H premières valeurs $|F(c)|$. Il est manifeste que chacune des valeurs $F(x)$, ainsi considérées est divisible par au moins un de ces nombres premiers, sans lui être égal (H étant pris au moins égal à r).

Cependant on ne peut pas affirmer qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs $F(x)$ qui soient des nombres premiers.

Le *tableau VIII* donne *trois autres exemples*, de types différents, limités chacun aux soixante premières valeurs des trinômes.

Pour le trinôme, de discriminant D positif, impair;

$$F(x) = x^2 + x - 109; \quad D = 347 = (-19) \times (-23);$$

les *vingt-huit premières valeurs sont des nombres premiers*.

Pour chacune d'elles la deuxième racine est supérieure à 27;

(pour $F(9) = -19$, et $F(11) = +23$, qui sont diviseurs du discriminant, les deux progressions sont confondues).

Dans les dix-neuf valeurs suivantes, seize *sont des nombres premiers*, les trois autres étant des produits de nombres premiers déjà obtenus :

$$F(28) = 19 \times 37; \quad F(34) = 23 \times 47; \quad F(45) = 37 \times 53.$$

(Le raisonnement fait par récurrence dans l'exemple précédent reste valable.)

La valeur suivante $F(47)$ est divisible par 19; mais le quotient est un nouveau nombre premier, ou de racine minimum 47.

Tous les *quotients* des valeurs restantes sont des nombres premiers ou sont égaux à 1.

Pour le trinôme de discriminant D positif, multiple de 4 :

$$F(x) = x^2 - 83; \quad D = 332 = (-4) \times (-83)$$

2 étant diviseur du discriminant, toutes les valeurs, pour x impair sont divisibles par 2, mais non par 4.

Les *vingt-quatre premières valeurs* sont des *nombres premiers ou des doubles de nombres premiers*. Toutefois deux facteurs premiers se trouvent deux fois et un d'eux est égal à 1 :

$$\begin{aligned} 17 &= |F(7)| : 2 = F(10); & 19 &= |F(8)| = F(11) : 2; \\ 1 &= |F(9)| : 2. \end{aligned}$$

Dans les vingt valeurs suivantes : *treize sont des nombres premiers ou des doubles de nombres premiers*; les sept autres sont des produits ou des doubles de produits des nombres premiers impairs, précédemment obtenus.

Tous les quotients des valeurs restantes de la table, au-delà de $F(43)$, qui sont différents de 1 et de 2, sont des nombres premiers.

Pour le trinôme de discriminant négatif, multiple de 4 :

$$F(x) = x^2 + 37; \quad D = -148 = (-4) \times (+37);$$

2 est encore diviseur du discriminant; toutes les valeurs pour x impair sont divisibles par 2, mais non par 4.

Les *dix-huit premières valeurs, ou leurs moitiés, sont des nombres premiers*. Dans les *trente-huit valeurs suivantes, vingt-neuf sont des nombres premiers ou des doubles de nombres premiers*; les neuf autres, ou leurs moitiés sont des produits des nombres premiers impairs déjà obtenus.

TABLEAU VIII.

$F(x)=x^2+x-109;$ $D=(-19)\times(-23)$			$F(x)=x^2-83;$ $D=(-4)\times(-83)$			$F(x)=x^2+37;$ $D=(-4)\times(+37)$		
c	F(c)	c	F(c)	c	F(c)	c	F(c)	c
0	-109	30	821	0	-	30	37	937
1	-107	31	823	1	-2×41	31	2×19	2×499
2	-103	32	947	2	-	32	41	1 061
3	-97	33	1 013	3	-2×37	33	2×23	2×563
4	-89	34	23×47	4	-	34	53	1 193
5	-79	35	1 151	5	-2×29	35	2×31	2×631
6	-67	36	1 223	6	-	36	73	31×43
7	-53	37	1 297	7	-2×17	37	2×43	2×19×37
8	-37	38	1 373	8	-	38	101	1 481
9	-19	39	1 451	9	-2×1	39	2×59	2×19×41
10	+	40	1 531	10	+	40	137	1 637
11	23	41	1 613	11	2×19	41	2×79	2×859
12	47	42	1 697	12	61	42	181	1 801
13	73	43	1 783	13	2×43	43	2×103	2×23×41
14	101	44	1 871	14	113	44	233	1 973
15	131	45	37×53	15	2×71	45	2×131	2×1 031
16	163	46	2 053	16	173	46	293	2 153
17	197	47	19×113	17	2×103	47	2×163	2×1 123
18	233	48	2 243	18	241	48	19×19	2 341
19	271	49	2 341	19	2×139	49	2×199	2×23×53
20	311	50	2 441	20	317	50	19×23	43×59
21	353	51	2 543	21	2×179	51	2×239	2×1 319
22	397	52	2 647	22	401	52	521	2 741
23	443	53	2 753	23	2×223	53	2×283	2×1 423
24	491	54	2 861	24	17×29	54	613	2 953
25	541	55	2 971	25	2×271	55	2×331	2×1 531
26	593	56	3 083	26	593	56	23×31	19×167
27	647	57	23×139	27	2×17×19	57	2×383	2×31×53
28	19×37	58	3 313	28	701	58	821	19×179
29	761	59	47×73	29	2×379	59	2×439	3 637

(à suivre)