28. Exemples de calculs.

28. Exemples de calculs.

Le tableau V donne les valeurs pour x de 0 à $H = 100$, du trinôme $F(x)$ déjà utilisé (tableaux I et III), de discriminant $D = -39$. Le *rang* r (**25**) est égal à 2.

Les *deux premières valeurs* de $F(x)$, ont pour diviseurs premiers **2**, **3**, **5**, qui sont des diviseurs de $F(x)$, pour les valeurs respectives:

$$0+2\lambda,\ 1+2\lambda; \quad 0+5\lambda,\ 4+5\lambda; \quad 1+3\lambda.$$

Il n'y a qu'une progression pour 3, qui est diviseur de D.

On a inscrit devant chaque valeur de la table, le monôme des puissances des facteurs 2, 3, 5, qui en est diviseur, de façon à calculer les quotients q_x. Les périodicités, ou les progressions sont mises en évidence par l'alignement (vertical) de ces facteurs.

Le *premier quotient*, rencontré ensuite, qui soit différent de 1 est $F(3):2 = \mathbf{11}$. Il est premier, on l'a inscrit devant les valeurs dont il est diviseur et qui sont données par les progressions de raison 11 et de premiers termes 3 et 7. Deux seulement $F(51)$ et $F(69)$ sont divisibles par une puissance supérieure de 11; les autres appartenant à des progressions de raison 11^2 sont extérieures à la table.

Le premier quotient obtenu ensuite, qui soit différent de 1 est $F(6):2^2 = \mathbf{13}$. C'est un nombre premier, diviseur de D; il n'est obtenu que pour les valeurs d'une seule progression $6+13\lambda$, et seulement à la première puissance.

Les quotients suivants, jusqu'à $F(13)$ exclus, qui devient supérieur à $(2\times6+1)^2 = 169$, sont égaux à 1, ou sont premiers:

$$F(7):(2\times3\times11) = 1; \quad F(8):2 = \mathbf{41}; \quad F(9):(2^2\times5^2) = 1;$$
$$F(10):(2^3\times3\times5) = 1; \quad F(11):2 = \mathbf{71}; \quad F(12):2 = \mathbf{83}.$$

On inscrit ces nombres premiers devant les valeurs de la table, dont ils sont diviseurs, et qui sont données par:

41 pour $x = 8, 49, 90;\ \ 32, 73;$ **71** pour $x = 11, 82;\ \ 59;$
83 pour $x = 12, 95;\ \ 70;$

ils n'y figurent qu'à la première puissance.

Le premier quotient différent de 1, qui est rencontré ensuite est $F(16):(2\times3) = \mathbf{47}$; il est premier et il en est de même de ceux des quotients suivants, qui sont différents de 1, jusqu'à $F(33)$ exclus, qui est supérieur à $(2\times 16 + 1)^2 = 1\,089$. Certains sont encore diviseurs d'autres valeurs du tableau, ce sont:

47 pour $x = 16, 63;\quad 30, 77;$ **79** pour $x = 17, 96;\quad 61;$
43 pour $x = 20, 63;\quad 22, 65;$ **59** pour $x = 21, 80;\quad 37, 96;$
61 pour $x = 24, 85;\quad 36, 97;$ **89** pour $x = 26;\quad 62.$

Par contre, les diviseurs premiers **281**, **383**, **137**, ne se rencontrent plus dans le tableau, limité à $H = 100$.

Le premier quotient rencontré ensuite, est $F(33): 2^2 =$ **283**; il est premier et il en est de même de ceux des quotients suivants qui sont différents de 1 jusqu'à $F(67)$ exclus qui est supérieur à $(2\times 33 + 1)^2 = 4\,489$. Dans ces quotients, ceux qui figurent plus d'une fois dans le tableau, limité à $H = 100$, sont:

127 pour $x = 35;\quad 91;$ **103** pour $x = 47;\quad 55;$
149 pour $x = 54;\quad 94;$ **139** pour $x = 64;\quad 74.$

Le premier quotient rencontré ensuite est $F(67): (2\times 3) =$ **761**; il est premier et il en est de même de tous les quotients suivants de la table, car $(2\times 67 + 1)^2 = 18\,225$ est supérieur à $F(100)$.

Dans la table, les nombres en caractères gras sont les facteurs p rencontrés pour leur racine minimum $\bar{c}_p$ (ou pour la première fois).

On rappelle qu'il a été indiqué ci-dessus que les nombres premiers ainsi obtenus sont ceux qui appartiennent à douze progressions arithmétiques de raison commune 39.

Le *deuxième exemple*, donné dans le tableau VI, est constitué par les valeurs pour x de O à $H = 100$, du trinôme, de discriminant D positif (définissant un corps réel):

$$F(x) = x^2 - 47; \qquad D = (-4)\times(-47) = 188.$$

Les valeurs sont négatives et de valeurs absolues décroissantes jusqu'à $F(6)$; elles sont ensuite positives et croissantes.

Le rang r est égal à 4, car:

$$5\times(2\times 3)^2 = 180 < 4\times 47 < 5\times(2\times 4)^2 = 320.$$

Les quatre premières valeurs de $F(x)$ ont pour diviseurs premiers: **2**, **47**, qui sont diviseurs de D, et **23**, **43**, **19**. On inscrit devant chaque valeur les monômes de ces facteurs qui en sont des diviseurs.

TABLEAU V.

$$F(x) = x^2+x+10 \qquad D = -39 = (-3)\times 13 \qquad r = 2.$$

c	$F(c)$	Diviseurs
0	10	**2. 5**
1	12	**2^2. 3**
2	16	2^4
3	22	2. **11**
4	30	2. 3. 5
5	40	2^3. 5
6	52	2^2. **13**
7	66	2. 3 *11*
8	82	2. **41**
9	100	2^2. 5^2
10	120	2^3. 3. 5
11	142	2. **71**
12	166	2. **83**
13	192	2^6. 3
14	220	2^2. 5. 11
15	250	2. 5^3
16	282	2. 3 **47**
17	316	2^2. **79**
18	352	2^5. 11
19	390	2. 3. 5. 13
20	430	2. 5. **43**
21	472	2^3. **59**
22	516	2^2. 3. *43*
23	562	2. **281**
24	610	2. 5. **61**
25	660	2^2. 3. 5. 11
26	712	2^3. **89**
27	766	2. **383**
28	822	2. 3. **137**
29	880	2^4. 5. 11
30	940	2^2. 5. *47*
31	1 002	2. 3. **167**
32	1 066	2. 13. *41*
33	1 132	2^2. **283**
34	1 200	2^4. 3. 5^2.
35	1 270	2. 5. **127**
36	1 342	2. 11. *61*
37	1 416	2^3. 3. *59*
38	1 492	2^2. **373**
39	1 570	2. 5. **157**
40	1 650	2. 3. 5^2. 11
41	1 732	2^2. **433**
42	1 816	2^3. **227**
43	1 902	2. 3. **317**
44	1 990	2. 5. **199**
45	2 080	2^5. 5. 13
46	2 172	2^2. 3. **181**
47	2 266	2. 11. **103**
48	2 362	2. **1 181**
49	2 460	2^2. 3. 5. 41
50	2 560	2^9. 5.
51	2 662	2. *11^3*
52	2 766	2. 3. **461**
53	2 872	2^3. **359**
54	2 980	2^2. 5. **149**
55	3 090	2. 3. 5. *103*
56	3 202	2. **1 601**
57	3 316	2^2. **829**
58	3 432	2^3. 3. 11. 13
59	3 550	2. 5^2. *71*
60	3 670	2. 5. **367**
61	3 792	2^4. 3. *79*
62	3 916	2^2. 11. *89*
63	4 042	2. 43. 47
64	4 170	2. 3. 5. **139**
65	4 300	2^2. 5^2. 43
66	4 432	2^4. **277**
67	4 566	2. 3. **761**
68	4 702	2. **2 351**
69	4 840	2^3. 5. 11^2
70	4 980	2^2. 3. 5. *83*
71	5 122	2. 13. **197**
72	5 266	2. **2 633**
73	5 412	2^2. 3. 11. 41
74	5 560	2^3. 5. *139*
75	5 710	2. 5. **571**
76	5 862	2. 3. **977**
77	6 016	2^7. 47
78	6 172	2^2. **1 543**
79	6 330	2. 3. 5. **211**
80	6 490	2. 5. 11. 59
81	6 652	2^2. **1 663**
82	6 816	2^5. 3. 71
83	6 982	2. **3 491**
84	7 150	2. 5^2. 11. 13
85	7 320	2^3. 3. 5. 61
86	7 492	2^2. **1 873**
87	7 666	2. **3 833**
88	7 842	2. 3. **1 307**
89	8 020	2^2. 5. **401**
90	8 200	2^3. 5^2. 41
91	8 382	2. 3. 11. *127*
92	8 566	2. **4 283**
93	8 752	2^4. **547**
94	8 940	2^2. 3. 5. *149*
95	9 130	2. 5. 11. 83
96	9 322	2. 59. 79
97	9 516	2^2. 3. 13. 61
98	9 712	2^4. **607**
99	9 910	2. 5. **991**
100	10 110	2. 3. 5. **337**

Les quotients suivants, pour les valeurs de x, définies par:

$$|F(x)| \leqslant (2\times 4)^2 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 10$$

sont uniquement des valeurs, ou des moitiés de valeurs du polynôme puisqu'à l'exception du diviseur 2, la première valeur devant laquelle on a inscrit un des diviseurs précédents est $F(16)$ divisible par 19. Ce sont:

$F(4) = -\mathbf{31}$; $F(5):2 = -\mathbf{11}$; $F(6) = -11$; $F(7):2 = +2$;
$F(8) = +\mathbf{17}$; $F(9):2 = +17$; $F(10) = +\mathbf{53}$.

On les inscrit devant les valeurs suivantes de la table qu'ils divisent, éventuellement avec l'exposant convenable.

Le quotient suivant $F(11):2 = +\mathbf{37}$ est premier; ceux qui suivent pour les valeurs de x:

$$|F(x)| \leqslant (2\times 11)^2 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 23,$$

sont égaux à 1, ou sont premiers. Ces derniers sont encore égaux aux valeurs, ou aux moitiés des valeurs du polynôme; les seuls quotients donnés par des diviseurs déjà inscrits, à l'exception de 2, sont:

$$F(16):(19\times 11) = +1; \qquad F(22):(23\times 19) = +1.$$

Les seuls nombres premiers ainsi obtenus qui figurent encore dans la table, limitée à $H = 100$, sont **37**, **97**, **61**, **89**.

Le premier quotient suivant qui est différent de 1 est $F(28):11 = \mathbf{67}$, ceux qui suivent pour les valeurs de x:

$$|F(x)| \leqslant (2\times 28)^2 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 56,$$

sont égaux à 1 ou premiers; ceux qui figurent plus d'une fois dans la table sont: **67**, **127**, **101**, **107**, **151**.

Au-delà de $x = 56$, tous les quotients sont premiers ou égaux à 1.

La disposition typographique est semblable à celle de l'exemple précédent, les nombres premiers obtenus pour la première fois (pour leur racine minimum) sont en caractères gras.

L'application de la loi de la réciprocité (**22**) montre que les nombres premiers ainsi obtenus sont ceux qui appartiennent à $\varphi(168):2 = 46$ progressions arithmétiques, de raison commune 168 et de premiers termes: 1, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 31, 35, 37, 39, 43, 49, 53, 61, 65, 67, 81, 87, 89, 91, 97, 99, 101, 107, 121, 123, 127, 135, 139, 145, 149, 151, 153, 157, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 177, 179, 187.

TABLEAU VI.

$F(x) = x^2 - 47 \qquad D = 188 = (-4) \times (-47) \qquad r = 4.$

c	$F(c)$	Diviseurs
0	— 47	**47**
1	— 46	**2. 23**
2	— 43	**43**
3	— 38	2. **19**
4	— 31	**31**
5	— 22	2. **11**
6	— 11	*11*
7	+ 2	2.
8	17	**17**
9	34	2. 17
10	53	**53**
11	74	2. **37**
12	97	**97**
13	122	2. **61**
14	149	**149**
15	178	2. **89**
16	209	*19.* 11
17	242	2. 11^2
18	277	**277**
19	314	2. **157**
20	353	**353**
21	394	2. **197**
22	437	*23.* 19
23	482	2. **241**
24	529	23^2
25	578	2. 17^2
26	629	17. *37*
27	682	2. *31.* 11
28	737	11. **67**
29	794	2. **397**
30	853	**853**
31	914	2. **457**
32	977	**977**
33	1 042	2. **521**
34	1 109	**1 109**
35	1 178	2. 19. 31
36	1 249	**1 249**
37	1 322	2. **661**
38	1 397	11. **127**
39	1 474	2. 11. *67*
40	1 553	1 553
41	1 634	2. *43.* 19
42	1 717	17. **101**
43	1 802	2. 17. *53*
44	1 889	**1 889**
45	1 978	2. 23. 43
46	2 069	**2 069**
47	2 162	2. 47. 23
48	2 257	37. *61*
49	2 354	2. 11. **107**
50	2 453	11. **223**
51	2 554	2. **1 277**
52	2 657	**2 657**
53	2 762	2. **1 381**
54	2 869	19. **151**
55	2 978	2. **1 489**
56	3 089	**3 089**
57	3 202	2. **1 601**
58	3 317	31. *107*
59	3 434	2. 17. *101*
60	3 553	19. 11. 17
61	3 674	2. 11. **167**
62	3 797	**3 797**
63	3 922	2. 53. 37
64	4 049	**4 049**
65	4 178	2. **2 089**
66	4 309	31. **139**
67	4 442	2. **2 221**
68	4 577	23. **199**
69	4 714	2. **2 357**
70	4 853	23. **211**
71	4 994	2. 11. **227**
72	5 137	11. **467**
73	5 282	2. 19. *139*
74	5 429	61. *89*
75	5 578	2. **2 789**
76	5 729	17. **337**
77	5 882	2. 17. **173**
78	6 037	**6 037**
79	6 194	2. 19. **163**
80	6 353	**6 353**
81	6 514	2. **3 257**
82	6 677	11. **607**
83	6 842	2. 11. **311**
84	7 009	43. *163*
85	7 178	2. 37. *97*
86	7 349	**7 349**
87	7 522	2. **3 761**
88	7 697	43. **179**
89	7 874	2. 31. *127*
90	8 053	**8 053**
91	8 234	2. 23. *179*
92	8 417	19. **443**
93	8 602	2. 23. 11. 17
94	8 789	47. 11. 17.
95	8 978	2. 67^2.
96	9 169	53. *173*
97	9 362	2. 31. *151*
98	9 557	19. **503**
99	9 754	2. **4 877**
100	9 953	37. **269**