

2, 2. Distributions. Epreuves d'hypothèses.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ce résultat s'étend sans peine au cas de plus de deux composantes, et on peut énoncer que

si \mathbf{U}^* est la somme (directe) des espaces mutuellement orthogonaux \mathbf{U}_1^* , ..., \mathbf{U}_t^* , on a

$$\mathbf{SC} \mathbf{U}^* = \sum_1^t \mathbf{SC} \mathbf{U}_i^* .$$

Il en résulte un mode de calcul des sommes de carrés qui est assez souvent plus commode que l'emploi des formules (7) et (8). On part d'une base u_1^* , ..., u_s^* de \mathbf{U}^* ; si elle n'est pas orthogonale, on l'orthogonalise (par exemple, par le procédé pas à pas de Schmidt), ce qui fournit la base orthogonale w_1^* , ..., w_s^* ; alors on a

$$\mathbf{SC} \mathbf{U}^* = \sum_1^s \mathbf{SC} \{ w_i^* \}$$

et donc, en vertu de (9),

$$\mathbf{SC} \mathbf{U}^* = \sum_1^s (w_i^* \mathbf{x})^2 / (w_i^* w_i) . \quad (11)$$

2, 14. On écrit, en particulier,

SCT (somme de carrés totale) pour $\mathbf{SC} \mathbf{V}^*$,
SCN (somme de carrés normale) pour $\mathbf{SC} \mathbf{V}_+$,
SCE (somme de carrés des erreurs) pour $\mathbf{SC} \mathbf{V}_0$.

On notera que, \mathbf{V}_+ et \mathbf{V}_0 étant par définition complémentaires et orthogonaux dans \mathbf{V}^* , on a toujours

$$\mathbf{SCT} = \mathbf{SCN} + \mathbf{SCE} .$$

D'autre part, e_1^* , ..., e_n^* forment une base orthogonale de \mathbf{U}^* , et $e_i^* \mathbf{x} = \mathbf{x}_i$; donc

$$\mathbf{SCT} = \sum_1^n \mathbf{x}_i^2 .$$

2, 2. Distributions. Epreuves d'hypothèses.

2, 21. Soit \mathbf{U}^* un sous-espace de \mathbf{V}^* , de dimension s , w_1^* , ..., w_s^* une base orthogonale de \mathbf{U}^* . Chaque $w_i^* \mathbf{x}$ est une variable

aléatoire normale, de moyenne $w_i^* \mathfrak{A} b$ et de variance $(w_i^* w_i) \sigma^2$; en outre, si $i \neq k$,

$$\text{cov}(w_i^* \mathfrak{x}, w_k^* \mathfrak{x}) = (w_i^* w_k) \sigma^2 = 0,$$

de sorte que les aléatoires $w_i^* \mathfrak{x}$ sont les composantes non corrélées d'un vecteur multinormal, elles sont donc indépendantes.

Dès lors, si l'on suppose que b est tel que $\mathbf{E} w_i^* \mathfrak{x} = 0$ ($i = 1, \dots, s$) (c'est-à-dire sous l'hypothèse $w_1^* \mathfrak{A} b = \dots = w_s^* \mathfrak{A} b = 0$), les aléatoires $(w_i^* \mathfrak{x})/\sigma$ sont gaussiennes et indépendantes, de sorte que

$$(1/\sigma^2) \mathbf{SCE} = \sum_1^s [(w_i^* \mathfrak{x})/\sigma]^2$$

est une aléatoire χ_s^2 .

Si, par contre, on ne suppose pas $\mathbf{E} w_i^* \mathfrak{x} = 0$, $(1/\sigma^2) \mathbf{SCE}$ est une aléatoire χ^2 décentrée à s degrés de liberté, elle est donc, en loi, plus grande qu'une aléatoire χ_s^2 :

$$\Pr[(\mathbf{SCE})/\sigma^2 > a] \geq \Pr[\chi_s^2 > a].$$

2, 22. Prenons pour \mathbf{U}^* l'espace des erreurs, \mathbf{V}_0 ; alors $s = n - r$ et les conditions $\mathbf{E} w_i^* \mathfrak{x} = 0$ sont identiquement ⁹⁾ satisfaites. On a donc, indépendamment de toute hypothèse quant à b ,

$$\Pr[\mathbf{SCE} > a \sigma^2] = \Pr[\chi_{n-r}^2 > a],$$

d'où, notamment,

$$\Pr[\mathbf{SCE}/a < \sigma^2 < \mathbf{SCE}/b] = \Pr[a < \chi_{n-r}^2 < b],$$

ce qui permet d'estimer σ .

2, 23. Supposons que $f^* b = m_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{A} b_H$ soit une combinaison estimable et que $l_f^* \mathfrak{x} \equiv m_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{x}$ soit son estimateur privilégié. Alors:

- sous l'hypothèse $f^* b = a$, $[(l_f^* \mathfrak{x} - a)/\sigma \sqrt{(l_f^* l_f)}]$ est une aléatoire gaussienne;
- $\mathbf{SCE}/(n - r) \sigma^2$ est une aléatoire χ_{n-r}^2 ;
- \mathbf{SCE} et $l_f^* \mathfrak{x}$ sont indépendantes (car l_f^* , estimatrice, est orthogonale à tous les vecteurs de \mathbf{V}_0).

Donc, sous l'hypothèse susdite,

$$\Delta_a = \frac{l_f^* \mathfrak{z} - a}{\sigma \sqrt{(l_f^* l_f)}} : \frac{\sqrt{\text{SCE}}}{\sigma \sqrt{(n-r)}} = \frac{(l_f^* \mathfrak{z} - a) \sqrt{(n-r)}}{\sqrt{[(l_f^* l_f) \text{SCE}]}}$$

est une aléatoire t_{n-r} , ce qui permet d'éprouver l'hypothèse en question ou d'estimer $f^* b$.

2, 24. Soient $f_1^* b, \dots, f_s^* b$ des combinaisons estimables, linéairement indépendantes, et $l_{f_i}^* \mathfrak{z}$ ($i = 1, \dots, s$) leurs estimateurs privilégiés. **Sous l'hypothèse** $f_1^* b = \dots = f_s^* b = 0$, les moyennes des $l_{f_i}^* \mathfrak{z}$ sont toutes nulles, et donc $(1/\sigma^2) \text{SC}\{l_{f_1}^*, \dots, l_{f_s}^*\}$ est une aléatoire χ_s^2 ; cela entraîne que

$$Q = \frac{\text{SC}\{l_{f_1}^*, \dots, l_{f_s}^*\}/s}{\text{SCE}/(n-r)}$$

est une aléatoire $F_{s, n-r}$. Si l'hypothèse en question est fausse, Q est, en loi, plus grande que $F_{s, n-r}$; on éprouvera donc cette hypothèse en comparant la valeur observée de Q à $F_{s, n-r}$, les grandes valeurs de Q étant critiques.

Remarque. — Il est manifeste que, si α est un nombre certain quelconque, on a $\text{SC}\{\alpha \omega^*\} = \text{SC}\{\omega^*\}$. On peut donc négliger un facteur constant dans le calcul d'une somme de carrés. Il n'en est pas de même dans le calcul de l'expression Δ_a du § 2, 33.

2, 3. Sous-espaces disjoints non orthogonaux.

2, 31. Soient U_q^* et U_{r-q}^* deux sous-espaces complémentaires de V_+ , de dimensions q et $r - q$: $V_+ = U_q^* \oplus U_{r-q}^*$; on ne suppose pas que U_q^* et U_{r-q}^* sont mutuellement orthogonaux. On cherche à interpréter $\text{SC } U_q^*$ et $\text{SC } U_{r-q}^*$. Pour cela, on considère, outre le modèle initial, le modèle où

$$(l^* \in U_{r-q}^*) \quad \text{implique} \quad \mathbf{E} l^* \mathfrak{z} = 0, \quad (11)$$

tandis que $(l^* \in U_q^*)$ implique $\mathbf{E} l^* \mathfrak{z} \neq 0$ pour une valeur au moins de b .

[On pourrait décrire ce modèle ainsi: soit l_1^*, \dots, l_q^* une base de U_q^* , l_{q+1}^*, \dots, l_r^* une base de U_{r-q}^* , et \mathfrak{B} telle que, dans le modèle initial,

$$\hat{b}_H = \mathfrak{B} [l_1^* \mathfrak{z} \dots, l_r^* \mathfrak{z}]^T, \quad \mathbf{E} \mathfrak{z} = \mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{B} b = \mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} w;$$