1,2. Estimateurs privilégiés.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$\mathbf{E}\,(\mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{x}) = \mathfrak{l}^\star\,\mathbf{E}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\ , \qquad (4)$$

d'où

$$\mathfrak{E}:\ \mathfrak{l}^\star \to \mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\ .\ ^{8})$$

$\mathfrak{E}$ est évidemment de rang r.

1, 14. Le noyau de $\mathfrak{E}$ (sous-espace V_0 de $\mathsf{V}^\star$ formé des vecteurs $\mathfrak{l}^\star$ tels que $\mathfrak{E}\,\mathfrak{l}^\star$ soit identiquement nul [9]) est appelé «espace des erreurs» [10]); il est de dimension n — rg $\mathfrak{E} = n - r$.

Le complément orthogonal de V_0 (sous-espace V_+ de $\mathsf{V}^\star$ formé des vecteurs $\mathfrak{m}^\star$ pour lesquels $\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{l} = 0$ pour tout $\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{V}_0$) est appelé « espace des estimatrices ». Une estimatrice est donc, par définition, une fonctionnelle linéaire des observations, orthogonale à toute fonctionnelle dont la moyenne est identiquement [9]) nulle. On remarquera que, $\mathsf{V}^\star$ étant somme directe de V_0 et V_+, à toute fonctionnelle linéaire des observations dont la moyenne n'est pas identiquement [9]) nulle correspond une et une seule fonctionnelle de V_+ ayant identiquement [9]) même moyenne qu'elle.

Enfin, l'image de $\mathfrak{E}$ (sous-espace B_+ de $\mathsf{B}^\star$ formé des combinaisons paramétriques $\mathfrak{b}^\star$ pour lesquelles il existe un vecteur $\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{V}^\star$ tel que $\mathbf{E}\,\mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{x} = \mathfrak{b}^\star\,\mathfrak{b}$) s'appelle « espace des combinaisons (paramétriques) estimables ». Nous noterons B_0 un complément quelconque de B_+.

On sait que la restriction de $\mathfrak{E}$ à V_+ est un isomorphisme de V_+ sur B_+; on peut donc énoncer que

toute combinaison estimable est la moyenne d'une et une seule estimatrice, et réciproquement.

1, 2. *Estimateurs privilégiés.*

1, 21. Si l'on a, pour $\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{V}^\star$, $\mathbf{E}\,\mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{x} = \mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$, $\mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$ est évidemment une combinaison estimable, et $\mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{x}$ en est un estimateur fidèle (au sens de la théorie statistique de l'estimation); si $\mathfrak{m}^\star \in \mathsf{V}_0$, $(\mathfrak{l}^\star + \mathfrak{m}^\star)\,\mathfrak{x}$ est aussi un estimateur fidèle de $\mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$; pour distinguer, parmi tous ces estimateurs fidèles de $\mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$, l'unique estimatrice, celle-ci est dite « estimateur privilégié de $\mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$ », et désignée par $\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{x}$ (donc, par définition, $\mathbf{E}\,\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{x} = \mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{l}_f^\star \in \mathsf{V}_+$).

1, 22. Théorème. *Parmi tous les estimateurs fidèles de la combinaison estimable* $\mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$, *l'estimateur privilégié a la variance minimum.*

Soit en effet $\mathfrak{m}^\star$ tel que $\mathbf{E}\,\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} = \mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$. On a, en posant $\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{x}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} &= \mathbf{E}\,[\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x}]\,[\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x}] \\ &= \mathbf{E}\,(\mathfrak{m}^\star\,\tilde{\mathfrak{x}})\,(\tilde{\mathfrak{x}}^\star\,\mathfrak{m})^\star = \mathfrak{m}^\star\,(\mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\tilde{\mathfrak{x}}^\star)\,\mathfrak{m}\,. \qquad (5)\end{aligned}$$

La définition des propriétés distributionnelles de $\mathfrak{x}$ faisant intervenir la base $\mathfrak{P}$, introduisons cette base pour un calcul explicite:

$$\mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\tilde{\mathfrak{x}}^\star = \mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}_P\,(\tilde{\mathfrak{x}}_P)^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}\begin{Vmatrix} \tilde{\mathfrak{x}}_1^2 & \tilde{\mathfrak{x}}_1\,\tilde{\mathfrak{x}}_2 \ldots & \tilde{\mathfrak{x}}_1\,\tilde{\mathfrak{x}}_n \\ \vdots & & \\ \tilde{\mathfrak{x}}_n\,\tilde{\mathfrak{x}}_1 \ldots & & \tilde{\mathfrak{x}}_n^2 \end{Vmatrix}$$

$$= \mathfrak{I}_n\,\sigma^2$$

d'où

$$\operatorname{var}\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} = (\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{m})\,\sigma^2\,.$$

Soit alors

$$\mathfrak{m}^\star = \mathfrak{l}_f^\star + \mathfrak{m}_0^\star\,,$$

de sorte que

$$\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_0^\star\,\mathfrak{l}_f = 0\,;$$

on a

$$\operatorname{var}\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} = (\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{l}_f)\,\sigma^2 + (\mathfrak{m}_0^\star\,\mathfrak{m}_0)\,\sigma^2 \geqslant (\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{l}_f)\,\sigma^2 = \operatorname{var}\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{x},$$

l'inégalité étant d'ailleurs stricte si $\mathfrak{m}_0^\star \neq 0$.

1, 3. *Exécution des calculs.*

1, 31. Pour l'exécution effective des calculs, il importe d'introduire une base dans chacun des espaces considérés; dans ce paragraphe, V et $\mathsf{V}^\star$ sont rapportés aux bases $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^\star$, B et $\mathsf{B}^\star$ sont rapportés à des bases déterminées $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}^\star$.

1, 32. Pour que $\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{V}_0$, il est nécessaire et suffisant que $\mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{A} = 0$; donc

l'espace des erreurs est engendré par ceux des vecteurs de $\mathsf{V}^\star$ *qui sont orthogonaux aux colonnes de la matrice* $\mathfrak{A}$ *(plus explicitement:* $\mathfrak{A}_{P,H}$*).*