3. Le groupe de transformations de Lorentz.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'espace et le temps sont relatifs à chaque repère lorentzien et diffèrent d'un repère à un autre. Leurs relations sont définies par les formules de transformations de Lorentz.

2. *Le déplacement d'une onde lumineuse est telle que* $ds^2 = 0$. Sa vitesse est donc invariante par changement de repère (c'est c).

Toute vitesse réelle est inférieure à celle de la lumière, donc telle que $ds^2 > 0$.

3. Le principe II entraîne que *toute loi mécanique ou électromagnétique s'exprime par une équation invariante par changement de repère* (ou indépendante du choix des coordonnées de V_4) et a fortiori invariante par les transformations du groupe de Lorentz. C'est ce qui conduit à l'expression tensorielle des grandeurs en relativité.

3. *Le groupe de transformations de Lorentz.*

Les transformations de Lorentz laissent invariante la forme quadratique fondamentale $dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$. On démontre qu'à une translation près, ce sont des transformations linéaires de matrice $a = (a_{\lambda\alpha})$

$$x'_\lambda = \sum_\alpha a_{\lambda_\alpha} x_\alpha \qquad \text{ou} \qquad x' = ax$$

telles que

$${}^t x' \eta x' = {}^t(ax)\, \eta\, (ax) = {}^t x\, {}^t a\, \eta\, ax = {}^t x\, \eta\, x,$$

soit

$$(3.1) \qquad {}^t a\, \eta\, a = \eta,$$

où $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ est la matrice d'éléments $\eta_{00} = +1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$, $\eta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$.

Ces transformations forment le groupe dit général de Lorentz. En fait on se limite à des transformations propres qui conservent l'orientation du temps et l'orientation de l'espace: elles sont telles que

$$(3.2) \qquad a_{00} \geqq 1 \quad \text{et} \quad \det a = +1\,.$$

Elles forment le groupe propre de Lorentz sous-groupe du groupe général.

A toute transformation de coordonnées x_α correspond un changement de repère lorentzien qui leur est associé. On voit alors que par des rotations purement spatiales ($\vec{e}_0$ et $\vec{e}'_0$ restent fixes), on peut amener $\vec{e}_1$ et $\vec{e}'_1$ dans le 2-plan ($\vec{e}_0$, $\vec{e}'_0$), $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ en $\vec{e}'_2$ et $\vec{e}'_3$. Autrement dit, toute transformation propre de Lorentz peut être réalisée comme produit de transformations spatiales pures (ne portant que sur les x_i) et d'une transformation dite *spéciale de Lorentz* de la forme

$$\begin{aligned} x'_0 &= a_{00}\, x_0 + a_{01}\, x_1 \\ x'_1 &= a_{10}\, x_0 + a_{11}\, x_1 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \,. \end{aligned}$$

En exprimant les conditions (3. 1) et (3. 2), on trouve

$$\text{(3. 3)} \qquad \begin{aligned} x'_0 &= x_0\, Ch\varphi - x_1\, Sh\varphi \\ x'_1 &= -\, x_0\, Sh\varphi + x_1\, Ch\varphi \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned}$$

φ désignant un paramètre. Ces formules traduisent une rotation d'argument φ dans le plan hyperbolique (x_0, x_1). La transformation inverse de (3. 3) s'en déduit immédiatement. On peut encore introduire le nombre $\beta = Th\varphi$ ($-1 \leqslant \beta \leqslant +1$) et écrire ces transformations sous la forme devenue classique:

$$x'_0 = \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x_0 = \frac{x'_0 + \beta x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\text{(3. 4)} \quad \text{(a)} \quad x'_1 = \frac{-\beta x_0 + x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(b)} \quad x_1 = \frac{\beta x'_0 + x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x'_2 = x_2 \qquad x_2 = x'_2$$

$$x'_3 = x_3 \qquad x_2 = x'_2$$