2. L'espace-temps de Minkowski.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Principe II. — *Aucune expérience physique, mécanique ou électromagnétique, faite à l'intérieur d'un repère de Galilée, ne doit permettre de mettre en évidence le mouvement de ce repère de Galilée par rapport à un autre.*

Ce sont les conséquences mathématiques de ces deux principes qui constituent la théorie de la relativité restreinte. Le premier principe montre que l'espace et le temps possèdent un caractère relatif, et conduit à définir à partir de l'existence du groupe de Lorentz, une structure géométrique pour la variété espace-temps à quatre dimensions. Le second principe conduit à donner aux équations de la mécanique et de l'électromagnétisme une forme géométrique indépendante de tout système de coordonnées choisi pour rapporter l'espace-temps, de façon à ce qu'elles restent en particulier invariantes par les transformations de Lorentz.

2. *L'espace-temps de* Minkowski.

L'espace-temps est une variété différentiable à quatre dimensions V_4 sur laquelle est définie une métrique improprement euclidienne de signature hyperbolique normale $(+---)$. Rapportée à des coordonnées orthonormales (x_α), cette métrique a la forme

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \tag{2. 1}$$

où $x_0 = ct$, t étant la variable temps classique et c la vitesse de la lumière dans le vide.

C'est l'espace-temps de Minkowski. Les coordonnées orthonormales (x_α) sont appelées *coordonnées lorentziennes*. Le repère associé s'appelle *repère lorentzien*. L'axe des x_0 est l'axe de temps et le 3-plan (x_1, x_2, x_3) l'espace associé. Nous réservons le terme « repère galiléen » à tout repère du 3-plan espace en mouvement de translation rectiligne uniforme au sens classique. Les variables (t, x_1, x_2, x_3) sont dites coordonnées galiléennes.

Il résulte de ces définitions et des principes I et II les énoncés suivants.

1. *Les changements de coordonnées lorentziennes permis sont ceux qui laissent invariante la forme quadratique fondamentale* (2. 1). Ils forment le *groupe de Lorentz*.

L'espace et le temps sont relatifs à chaque repère lorentzien et diffèrent d'un repère à un autre. Leurs relations sont définies par les formules de transformations de Lorentz.

2. *Le déplacement d'une onde lumineuse est telle que* $ds^2 = 0$. Sa vitesse est donc invariante par changement de repère (c'est c).

Toute vitesse réelle est inférieure à celle de la lumière, donc telle que $ds^2 > 0$.

3. Le principe II entraîne que *toute loi mécanique ou électromagnétique s'exprime par une équation invariante par changement de repère* (ou indépendante du choix des coordonnées de V_4) et a fortiori invariante par les transformations du groupe de Lorentz. C'est ce qui conduit à l'expression tensorielle des grandeurs en relativité.

3. *Le groupe de transformations de Lorentz.*

Les transformations de Lorentz laissent invariante la forme quadratique fondamentale $dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$. On démontre qu'à une translation près, ce sont des transformations linéaires de matrice $a = (a_{\lambda\alpha})$

$$x'_\lambda = \sum_\alpha a_{\lambda_\alpha} x_\alpha \qquad \text{ou} \qquad x' = ax$$

telles que

$${}^t x' \eta x' = {}^t(ax) \eta (ax) = {}^t x {}^t a \eta a x = {}^t x \eta x,$$

soit

$$(3.1) \qquad {}^t a \eta a = \eta,$$

où $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ est la matrice d'éléments $\eta_{00} = +1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$, $\eta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$.

Ces transformations forment le groupe dit général de Lorentz. En fait on se limite à des transformations propres qui conservent l'orientation du temps et l'orientation de l'espace: elles sont telles que

$$(3.2) \qquad a_{00} \geqq 1 \quad \text{et} \quad \det a = +1 .$$