

# 1. Introduction.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE <sup>1)</sup>

par Joseph HERSCH, Institut Battelle, Genève

(Reçu le 25 octobre 1959.)

## 1. INTRODUCTION.

Je voudrais attirer votre attention sur quelques aspects de deux problèmes de physique mathématique: le *problème de Dirichlet* et celui de la *fréquence fondamentale d'une membrane vibrante*. Il s'agira surtout des principes extrémaux liés à ces problèmes.

### 1. 1. Un problème de Dirichlet.

Nous considérons la solution  $\varphi(x, y)$  du problème aux limites (fig. 1):

$$\Delta\varphi = 0 \text{ dans } G; \quad \begin{array}{l} \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \varphi = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{array};$$

nous nous intéressons particulièrement à l'intégrale de Dirichlet

$$D(\varphi) = \iint_G \text{grad}^2 \varphi \, dx dy .$$

Cette grandeur peut être évaluée dans les deux sens à l'aide des deux principes suivants:

*Principe de Dirichlet:*

Soit  $\varrho(x, y)$  une fonction continue et lisse par morceaux dans  $G$ , et telle que

$$\begin{array}{l} \varrho = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \varrho = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{array};$$

alors  $D(\varphi) \leq D(\varrho)$ .

*Principe de Thomson:*

Soit  $\vec{p}(x, y)$  un champ vectoriel dans  $G$ , sans sources:  $\text{div } \vec{p} = 0$ ; alors

$$D(\varphi) \geq \frac{\left( \oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds \right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 \, dx dy} .$$

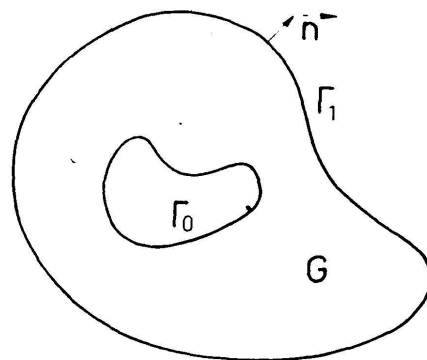


Fig. 1

<sup>1)</sup> Leçon inaugurale à l'École polytechnique fédérale (Zurich), le 31 janvier 1959.

1. 2. *La vibration fondamentale d'une membrane.*

Dans un domaine  $G$  de contour  $\Gamma$ , nous cherchons un nombre positif  $\lambda_1$  et une fonction  $\varphi(x, y)$  deux fois continûment dérivable, tels que  $\Delta\varphi + \lambda_1\varphi = 0$  et  $\varphi > 0$  dans  $G$ ,  $\varphi = 0$  sur  $\Gamma$ .

$\sqrt{\lambda_1}$  est la fréquence fondamentale,  $\varphi$  la première fonction propre.

*Principe de Rayleigh:*

Soit  $\varphi(x, y)$  une fonction continue et lisse par morceaux dans  $G$ , qui s'annule sur  $\Gamma$ ; alors

$$\lambda_1 \leq R[\varphi] = \frac{D(\varphi)}{\iint_G \varphi^2 dx dy}$$

*Existe-t-il un principe « du type Thomson » ?*

$$\lambda_1 \geq ?$$

2. LA CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE  
D'UNE PLAQUE HOMOGÈNE.

Considérons le domaine  $G$  (fig. 1) comme une plaque homogène de résistance spécifique  $\rho = 1$ , bordée par deux électrodes  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$ ; appelons  $\varphi(x, y)$  le potentiel au point  $(x, y)$ ; on impose les potentiels 0 sur  $\Gamma_0$  et 1 sur  $\Gamma_1$  (différence de potentiel  $V = 1$ ). Comme  $\rho = 1$ , on a la densité de courant  $\vec{i} = \text{grad } \varphi$ ; la conservation de la charge s'exprime par  $0 = \text{div } \vec{i} = \Delta\varphi$ . On voit donc que le potentiel  $\varphi$  est la solution du problème de Dirichlet du § 1. 1.

Comme  $\rho = 1$  et  $V = 1$ , la chaleur de Joule dégagée par seconde est

$$J = \iint_G \vec{i}^2 dx dy = D(\varphi) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma_1} \vec{i} \cdot \vec{n} ds = I,$$

où  $I$  désigne l'intensité totale et  $\vec{n}$  la normale extérieure.

La résistance totale est

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{I}.$$