

## 2. Exemple d'une fonction continue sans dérivée, dont LE MODULE DE CONTINUITÉ SATISFAIT $\omega(h) \leq \chi(h)$ , ÉTANT UNE FONCTION DONNÉE.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

*Maxima relatifs.*

On a

$$f(x) = f_{2^{n-1}}(x) + \sum_{k=n}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x). \quad (4)$$

Pour que  $x$  soit un point où  $f$  admet un maximum relatif, il suffit donc que  $f_{2^{n-1}}$  soit constant au voisinage de  $x$ , et que  $f_1(4^k x) = 1$  pour  $k \geq n$ ; la première condition équivaut à  $x_1 + x_2 + \dots + x_{2^n} = n$ , la seconde, comme on l'a vu, à  $x_{2^{k+1}} + x_{2^{k+2}} = 1$  ( $k \geq n$ ).

Inversement, soit  $x$  un point où  $f$  admet un maximum relatif, il admet un développement unique de la forme (2); je dis qu'il existe une infinité de valeurs de  $n$  pour lesquelles  $x_1 + x_2 + \dots + x_{2^n} = n$ . Sinon, en effet,  $f'_n(x) = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n$  garde un signe constant pour  $n$  assez grand, soit, pour fixer les idées, le signe  $+$ ; soit  $I_n$  le segment rectiligne du graphe de  $f_{n-1}$  qui se projette sur l'axe des  $x$  suivant le segment  $[p2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$  contenant  $x$ ; pour  $n$  assez grand,  $I_{n+1}$  est à gauche de  $I_n$ , donc  $I_{n+j}$  est à gauche de  $I_n$  ( $j \geq 1$ ), donc le point  $(x, f(x))$  est à gauche de  $I_n$ ; comme  $I_n$  est une corde du graphe de  $f$ ,  $f(x)$  n'est pas un maximum relatif, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc un  $n$  tel que  $x_1 + x_2 + \dots + x_{2^n} = n$ , et tel que, sur l'intervalle contenant  $x$  où  $f_{2^{n-1}}$  est constant,  $f(x)$  soit le maximum de  $f$ . D'après (4), il s'ensuit que  $f_1(4^k x) = 1$  pour  $k \geq n$ .

Ainsi, l'ensemble des points où  $f$  admet un maximum relatif est l'ensemble des  $x$ , de la forme (2), satisfaisant les égalités  $x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k} = k$  pour  $k$  assez grand. C'est un  $F_\sigma$ , dense sur la droite, de mesure nulle.

2. EXEMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE, DONT LE MODULE DE CONTINUITÉ SATISFAIT  $\omega(h) \leq \chi(h)$ ,  $\chi$  ÉTANT UNE FONCTION DONNÉE.

Si  $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \chi(h) < \infty$ , l'inégalité  $\omega(h) \leq \chi(h)$  entraîne que la fonction est lipschitzienne <sup>2)</sup>, donc admet une dérivée presque

<sup>2)</sup> En vertu de l'inégalité  $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$ , valable pour tout  $\delta > 0$  et tout entier naturel  $n$ .

partout. Nous devons donc supposer, pour construire notre exemple, que  $\lim_{h \rightarrow \infty} h^{-1} \chi(h) = \infty$ . Moyennant cette hypothèse, la construction est possible.

Considérons en effet

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-k_{\nu}} \varphi(2^{k_{\nu}} x) \quad (5)$$

où  $k_{\nu}$  est une suite d'entiers croissants à déterminer. Le raisonnement de M. de Rham montre que  $g$  n'est dérivable en aucun point.

D'autre part

$$|g(x+h) - g(x)| < \nu h + 2 \cdot 2^{-k_{\nu}+1} \text{ pour tout } \nu.$$

Soit  $\omega(h)$  le module de continuité de  $g$ ; pour  $2^{-k_{\nu}+1} \leq h < 2^{-k_{\nu}}$ , on a  $\omega(h) < (\nu + 2)h$ .

Quitte à diminuer  $\chi(h)$ , on peut supposer  $h^{-1} \chi(h) \uparrow \infty$  et  $\chi(h) \downarrow 0$  quand  $h \downarrow 0$ . Il suffit alors de choisir  $\{k_{\nu}\}$  de sorte que  $\nu + 2 < 2^{k_{\nu}} \chi(2^{-k_{\nu}})$  pour avoir  $\omega(h) < \chi(h)$  pour tout  $h > 0$ .

*Ainsi, dans toute classe de fonctions, définie par une majoration des modules de continuité, et contenant des fonctions non lipschitziennes, il existe des fonctions n'admettant de dérivées en aucun point.*

### 3. EXEMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE, DONT LE MODULE DE CONTINUITÉ EN CHAQUE POINT EST MINORÉ PAR UNE FONCTION DONNÉE.

Soit  $h > 0$ ,  $\psi(h)$  une fonction positive tendant vers zéro quand  $h \downarrow 0$ . Nous allons construire une fonction continue dont le module de continuité  $\omega_x(h)$  satisfait en chaque point  $x$

$$\omega_x(h) > \psi(h) \quad (6)$$

quitte à majorer  $\psi(h)$ , on peut supposer  $\psi$  croissante.

Considérons

$$g_1(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu} 2^{-k_{\nu}} \varphi(2^{k_{\nu}} x) \quad (7)$$