§ 2. Démonstration des théorèmes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

IV. *Si* $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 1$, *la fonction* $ax(t) + by(t)$, *où* a *et* b *sont des constantes, n'a pour aucune valeur de* t *une dérivée non nulle.*

Cela s'applique en particulier aux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ qui sont par suite des fonctions singulières. Mais il n'en est plus ainsi lorsque $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$.

V. *Si* $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, *les fonctions* $x(t)$ et $y(t)$ *sont liées par la relation*

$$\gamma_2 x(t) + \gamma_1 y(t) = t$$

et elles ont des dérivées premières continues

$$x'(t) = \frac{1}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}, \qquad y'(t) = \frac{m(t)}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}.$$

En vertu de II, si $\gamma_1 = 1 - \gamma_2 \neq \frac{1}{2}$ ces dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ sont des fonctions singulières.

Le cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$ est effectivement exceptionnel; alors $x = 2t - t^2$, $y = t^2$, $m = \frac{t}{1-t}$ et la courbe C est une parabole.

Dans un article antérieur *), j'ai établi I pour le cas où $\gamma_1 = \gamma_2$ et II, III et IV pour le cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, en utilisant des équations fonctionnelles vérifiées par $M(t)$. Je traiterai ici le cas général par une méthode directe et plus simple. Ensuite, revenant sur les équations fonctionnelles, je montrerai que, dans le cas où $\gamma_1 = 1 - \gamma_2 \neq \frac{1}{2}$, les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ se réduisent essentiellement à une fonction singulière très simple et connue.

§ 2. Démonstration des théorèmes.

Désignons par $Q_{n,h}$ la projection du côté $S_h^n S_{h+1}^n$ de P_n, faite parallèlement à une droite donnée quelconque sur une autre

*) « Sur une courbe plane », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, *39* (1956), pp. 25-42. Voir aussi sur le même sujet: « Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane », *Elemente der Mathematik*, *2* (1947), pp. 73-76 et 89-97; ainsi que: « Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles », *Rendiconti del Seminario Matematicà dell' Università e del Politecnico di Torino*, *16* (1957), pp. 101-113.

droite donnée. De la définition même de la trisection, on déduit

$$Q_{n+1,2h} = \alpha Q_{n,h}, \qquad Q_{n+1,2h+1} = \beta_2 Q_{n,h} + \beta_1 Q_{n,h+1}$$
$$(h = 0, 1, \ldots, 2^n) \cdot \qquad (1)$$

Ces relations déterminent par récurrence les $Q_{n,h}$ à partir de $Q_{0,0}$ et $Q_{0,1}$.

Considérons le développement de t dans le système binaire

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i} \quad (a_i = 0 \text{ ou } 1)$$

et la suite correspondante d'intervalles $i_n = (t_n, t_n + 2^{-n})$ avec

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{-i} .$$

On sait que si t n'est pas une fraction binaire, ce développement est unique, tandis que si t est une fraction binaire, il en existe deux; pour l'un, qu'on appellera le développement à droite, dès que n est assez grand $a_n = 0$ et $t = t_n$, de sorte que i_n est à droite de t; pour l'autre, qu'on appellera le développement à gauche, dès que n est assez grand, $a_n = 1$ et $t = t_n + 2^{-n}$, de sorte que i_n est à gauche de t.

Soient (A_n, B_n) et (C_n, D_n) les projections sur les axes des côtés de P_n qui contiennent respectivement les points $M(t_n)$ et $M(t_n + 2^{-n})$. Si l'on désigne par $A_{n,h}$ la projection sur Ox de $S_h^n S_{h+1}^n$, pour $h = 2^n t_n$ on a $A_n = A_{n,h}$ et $C_n = A_{n,h+1}$. Ensuite, si $a_{n+1} = 0$, on aura $A_{n+1} = A_{n+1,2h}$, $C_{n+1} = A_{n+1,2h+1}$ tandis que si $a_{n+1} = 0$ on a $A_{n+1} = A_{n+1,2h+1}$, $C_{n+1} = A_{n+1,2h+2}$. Comme les $A_{n,h}$ satisfont aux mêmes relations (1) que les $Q_{n,h}$, cela entraîne

$$\left.\begin{aligned} A_{n+1} &= \alpha A_n \quad \text{et} \quad C_{n+1} = \beta_2 A_n + \beta_1 C_n \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 0 \,, \\ A_{n+1} &= \beta_2 A_n + \beta_1 C_n \quad \text{et} \quad C_{n+1} = \alpha C_n \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 1 \,. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

On a des relations tout à fait analogues entre les B_n et les D_n,

$$\left.\begin{aligned} B_{n+1} &= \alpha B_n \quad \text{et} \quad D_{n+1} = \beta_2 B_n + \beta_1 C_n \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 0 \,, \\ B_{n+1} &= \beta_2 B_n + \beta_1 D_n \quad \text{et} \quad D_{n+1} = \alpha C_n \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 1 \,. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Posons

$$X_n = \frac{C_n}{A_n}.$$

Il résulte de (2) que

$$X_{n+1} = \begin{cases} \gamma_1 X_n + \gamma_2 & \text{si} \quad a_{n+1} = 0\,, \\ \dfrac{X_n}{\gamma_1 X_n + \gamma_2} & \text{si} \quad a_{n+1} = 1\,. \end{cases} \tag{4}$$

Pour établir nos théorèmes, nous aurons besoin de quelques propriétés de ces suites X_n.

Comme $A_0 = \frac{1}{\gamma_2}$ et $C_0 = 0$, on a $X_0 = 0$. Par suite, si $a_1 = \ldots = a_{p-1} = 1$ et $a_p = 0$, on a $X_1 = \ldots = X_{p-1} = 0$ et $X_p = \gamma_2$. Le premier terme non nul de la suite X_n vaut γ_2 et correspond au premier terme nul de la suite a_n; les suivants sont tous > 0. Pour $t = 1$, et seulement dans ce cas, tous les X_n sont nuls.

Si $a_n = 0$ pour $n \geqslant p$, en résolvant l'équation de récurrence fournie par la première relation (4), on obtient (pour $n \geqslant p$)

$$X_n = \begin{cases} K\,\gamma_1^n + \dfrac{\gamma_2}{1 - \gamma_1} & \text{si} \quad \gamma_1 \neq 1\,, \\ \gamma_2\, n + K' & \text{si} \quad \gamma_1 = 1\,, \end{cases} \tag{5}$$

où K et K′ sont indépendants de n.

Si $a_n = 1$ pour $n \geqslant p$, en considérant la seconde relation (4) qui peut s'écrire $X_{n+1}^{-1} = \gamma_2 X_n^{-1} + \gamma_2$, on obtient (pour $n \geqslant p$)

$$X_n^{-1} = \begin{cases} K\,\gamma_2^n + \dfrac{\gamma_1}{1 - \gamma_2} & \text{si} \quad \gamma_2 \neq 1\,, \\ \gamma_1\, n + K' & \text{si} \quad \gamma_2 = 1\,. \end{cases} \tag{6}$$

LEMME. — *Si* t *n'est pas une fraction binaire et si la suite* X_n *converge, sa limite est 1 et l'on a* $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$.

Pour la suite correspondant au développement à droite d'une fraction binaire, on a

$$\lim_{n=\infty} X_n = \frac{\gamma_2}{1 - \gamma_1} \quad \textit{si} \quad \gamma_1 < 1 \quad \textit{et} \quad \lim X_n = \infty \quad \textit{si} \quad \gamma_1 \geqslant 1\,.$$

Pour la suite correspondant au développement à gauche d'une fraction binaire < 1, *on a*

$$\lim_{n=\infty} X_n = \frac{1-\gamma_2}{\gamma_1} \quad si \quad \gamma_2 < 1 \quad et \quad \lim_{n=\infty} X_n = 0 \quad si \quad \gamma_2 \geqslant 1 \quad .$$

Si les deux suites X_n *correspondant aux développements à droite et à gauche d'une fraction binaire convergent vers la même limite, on a* $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ *et cette limite est 1.*

Pour établir la première assertion, il suffit de remarquer que si t n'est pas une fraction binaire, chacune des deux relations (4) est vérifiée pour une infinité de valeurs de n, de sorte que si $\lim X_n = \lambda$, on a $\lambda = \gamma_1 \lambda + \gamma_2$ et $1 = \gamma_1 \lambda + \gamma_2$, d'où $\lambda = 1$ et $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$.

La seconde et la troisième assertions résultent des formules (5) et (6) et la dernière en découle immédiatement.

Pour établir la première partie de I, il suffit de montrer que l'accroissement $\Delta_n m = m(t_n + 2^{-n}) - m(t_n)$ de $m(t)$ dans l'intervalle i_n tend vers zéro pour $n \to \infty$ lorsque t n'est pas une fraction binaire.

En vertu de la définition même de $m(t)$, on a

$$m(t_n) = \frac{B_n}{A_n}, \quad m\left(t_n + 2^{-n}\right) = \frac{D_n}{C_n} \quad \text{d'où} \quad \Delta_n m = \frac{A_n D_n - B_n C_n}{A_n C_n}.$$

De (2) et (3) on tire alors

$$\frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} = \begin{cases} \dfrac{\gamma_1 X_k}{\gamma_1 X_k + \gamma_2} & \text{si} \quad a_{k+1} = 0 , \\[2ex] \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1 X_k + \gamma_2} & \text{si} \quad a_{k+1} = 1 , \end{cases} \tag{7}$$

d'où encore, en vertu de (4),

$$\frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} = \begin{cases} \gamma_1 \dfrac{X_k}{X_{k+1}} & \text{si} \quad a_{k+1} = 0 , \\[2ex] \gamma_2 \dfrac{X_{k+1}}{X_k} & \text{si} \quad a_{k+1} = 1 . \end{cases} \tag{8}$$

Choisissons p tel que $t_p + 2^{-p} < 1$. Alors $\Delta_p\, m$ est fini (ce ne serait pas le cas si $t_p + 2^{-p} = 1$ car $m(1) = \infty$) et l'on peut écrire, pour $n > p$,

$$\Delta_n\, m = \Delta_p\, m \prod_{k=p}^{n-1} \frac{\Delta_{k+1}\, m}{\Delta_k\, m}. \tag{9}$$

Les facteurs de ce produit sont tous < 1, en vertu de (7). Si $a_k = 0$, on a, d'après (4), $X_k = \gamma_1 X_{k-1} + \gamma_2 > \gamma_2$ et si de plus $a_{k+1} = 1$, en vertu de (7),

$$\frac{\Delta_{k+1}\, m}{\Delta_k\, m} < \frac{1}{1 + \gamma_1}.$$

On majore donc le produit figurant au second membre de (9) en remplaçant

$$\frac{\Delta_{k+1}\, m}{\Delta_k\, m} \quad \text{par} \quad \frac{1}{1 + \gamma_1}$$

si $a_k = 0$ et $a_{k+1} = 1$, et par 1 dans tous les autres cas. Par suite, si N est le nombre d'entiers k tels que $p \leqslant k < n$ et $a_k = 0$ et $a_{k+1} = 1$, on a

$$\Delta_n\, m < \Delta_p\, m \left(\frac{1}{1 + \gamma_1}\right)^{N}.$$

Comme t n'est pas une fraction binaire, $N \to \infty$ et par suite $\Delta_n\, m \to 0$ pour $n \to \infty$.

Pour établir la seconde partie de I, supposons que t soit une fraction binaire < 1 et considérons son développement à droite. Soit p tel que $a_k = 0$ pour $k \geqslant p$. On tire de (9) et (8):

$$\Delta_n\, m = \Delta_p\, m\, \gamma_1^{n-p} \frac{X_p}{X_n}.$$

Il résulte alors de (5) que, pour $n \to \infty$, $\Delta_n\, m$ tend vers zéro si $\gamma_1 \leqslant 1$ et vers une limite > 0 si $\gamma_1 > 1$. Comme

$$m(t + 0) - m(t) = \lim_{n=\infty} \Delta_n\, m,$$

la seconde assertion de I est établie. La dernière assertion, concernant la continuité à gauche, s'obtient de la même manière.

Pour démontrer les théorèmes suivants, nous ferons constamment usage de la remarque que *si une fonction a une dérivée en un point, sa pente moyenne dans un intervalle contenant ce point tend vers la dérivée lorsque la longueur de cet intervalle tend vers zéro.*

Ainsi la pente moyenne de $m(t)$ dans i_k étant $2^k \Delta_k m$, si $m'(t)$ existe, on a

$$m'(t) = \lim_{k=\infty} 2^k \Delta_k m .$$

Si, de plus, $m'(t) \neq 0$, on aura

$$\lim_{k=\infty} \frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} = \frac{1}{2} .$$

Mais, en vertu de (7), cela est équivalent à $\lim\limits_{k=\infty} X_k = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, et le lemme montre qu'alors $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, ce qui établit II.

De la même manière, on voit que si la fonction $m(x)$ a une dérivée non nulle au point $x = m(t)$, on aura

$$\lim_{k=\infty} \frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} : \frac{\Delta_{k+1} x}{\Delta_k x} = 1 . \tag{10}$$

Or $\Delta_k x$ est la projection sur Ox du vecteur joignant $M(t_k)$ à $M(t_k + 2^{-k})$ et vaut

$$\Delta_k x = \frac{\gamma_2 A_k + \gamma_1 C_k}{\gamma_1 + \gamma_2} . \tag{11}$$

En tenant compte de (2), on obtient

$$\frac{\Delta_{k+1} x}{\Delta_k x} = \begin{cases} \alpha \dfrac{\gamma_1^2 X_k + \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2}{\gamma_1 X_k + \gamma_2} & \text{si} \quad a_{k+1} = 0 , \\ \alpha \dfrac{\gamma_1 (1 + \gamma_2) X_k + \gamma_2^2}{\gamma_1 X_k + \gamma_2} & \text{si} \quad a_{k+1} = 1 . \end{cases} \tag{12}$$

Remarquons en passant que la somme des deux expressions aux seconds membres de (12) est identique à 1, en vertu de $\alpha(1 + \gamma_1 + \gamma_2) = 1$; en accord avec le fait que la somme des valeurs correspondantes de $\Delta_{k+1} x$ est égale à $\Delta_k x$.

En utilisant (7) et (12), il vient

$$\frac{\Delta_{k+1}\, m}{\Delta_k\, m} : \frac{\Delta_{k+1}\, x}{\Delta_k\, x} = \begin{cases} \dfrac{\gamma_1 X_k}{\alpha\left(\gamma_1^2 X_k + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\right)} & \text{si} \quad a_{k+1} = 0\,, \\ \dfrac{\gamma_2}{\alpha\left[\gamma_1 (1 + \gamma_2) X_k + \gamma_2^2\right]} & \text{si} \quad a_{k+1} = 1\,; \end{cases}$$

d'où l'on déduit que (10) est équivalent à

$$\lim_{k=\infty} X_k = \frac{\gamma_2 (1 + \gamma_1)}{\gamma_1 (1 + \gamma_2)}$$

et le lemme montre qu'alors $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, ce qui établit III.

Enfin, si $x(t)$ a une dérivée $x'(t) \neq 0$, on a

$$\lim_{k=\infty} \frac{\Delta_{k+1}\, x}{\Delta_k\, x} = \frac{1}{2}$$

ce qui d'après (12) est équivalent à

$$\lim_{k=\infty} X_k = \frac{\gamma_2 (1 + \gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_1 (1 + \gamma_2 - \gamma_1)}$$

et le lemme montre qu'alors $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, ce qui établit IV pour ce qui concerne $x(t)$.

La même méthode s'applique à la fonction

$$z(t) = a\,x(t) + by(t)\,.$$

On peut supposer que les constantes a et b ne sont pas toutes deux nulles. L'accroissement de $z = ax + by$ sur le côté $S_h^n\, S_{h+1}^n$ n'est pas autre chose que la projection $Q_{n,h}$ de ce côté, faite parallèlement à la droite $ax + by = 0$, sur une autre droite. Les relations (1) montrent que le rapport $Z_n = \dfrac{Q_{n,h+1}}{Q_{n,h}}$ (où $h = 2^n\, t_n$) des projections des côtés de P_n contenant respectivement $M(t_n + 2^{-n})$ et $M(t_n)$ satisfait aux mêmes relations (4) que X_n. Par suite, le lemme s'applique à Z_n comme à X_n et le rapport $\dfrac{\Delta_{k+1}\, z}{\Delta_k\, z}$ des accroissements de z dans i_{k+1} et dans i_k est donné par la formule obtenue en remplaçant X_n par Z_n dans (12). Exactement comme ci-dessus pour $x(t)$, on en déduit que si $z(t)$

a une dérivée non nulle, on a $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, ce qui achève la démonstration de IV.

Supposons maintenant que $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$. Alors

$$\beta_1 + \beta_2 = \alpha = \frac{1}{2},$$

et les relations (1) montrent que si $Q_{n,h} = 2^{-n}$ pour tout h, $Q_{n+1,h} = 2^{-n-1}$ pour tout h. Pour $z = \gamma_2 x + \gamma_1 y$, on a $Q_{0,0} = Q_{0,1} = 1$; on aura par suite $Q_{n,h} = 2^{-n}$ pour tout h et tout n. L'accroissement de $z = \gamma_2 x + \gamma_1 y$ sur tout côté de P_n étant ainsi égal à 2^{-n}, l'accroissement $\Delta_n z$ de

$$z(t) = \gamma_2 x(t) + \gamma_1 y(t)$$

dans i_n est toujours égal à 2^{-n} et l'on en déduit $z(t) = t$.

Cette relation $\gamma_2 x(t) + \gamma_1 y(t) = t$ montre que si l'une des dérivées $x'(t)$ ou $y'(t)$ existe, l'autre existe aussi et

$$\gamma_2 x'(t) + \gamma_1 y'(t) = 1 .$$

Mais on a aussi $y'(t) = m(t)\, x'(t)$, d'où

$$x'(t) = \frac{1}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}, \quad y'(t) = \frac{m(t)}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)} .$$

Pour achever la démonstration de V, il suffira dès lors de prouver que $x'(t)$ existe *partout*.

En raisonnant par récurrence, on déduit de (4) que $X_n < 1$, c'est-à-dire $A_{n,h} > A_{n,h+1}$. L'accroissement de $x(t)$ dans l'intervalle $(h2^{-n}, h2^{-n} + 2^{-n})$, étant égal à $\gamma_2 A_{n,h} + \gamma_1 A_{n,h+1}$, diminue donc lorsque h augmente. Par suite, n étant fixé, il est maximum pour $h = 0$. Autrement dit, k étant fixé, $\Delta_k x$ est maximum pour $t = 0$. Pour calculer sa valeur, remarquons que la première formule (12) peut s'écrire, en tenant compte de (4)

$$2 \frac{\Delta_{n+1} x}{\Delta_n x} = \frac{X_{n+2}}{X_{n+1}} .$$

On en déduit, pour $t = 0$,

$$2^k \Delta_k x = \frac{X_{k+1}}{X_1} .$$

D'autre part, pour $t = 0$, en vertu de (5),

$$X_n = 1 - \gamma_1^n,$$

d'où

$$2^k \Delta_k x = \frac{1 - \gamma_1^{k+1}}{1 - \gamma_1}.$$

Cette expression est le maximum de la pente moyenne de $x(t)$ dans les intervalles $(h2^{-k}, h2^{-k} + 2^{-k})$ pour $h = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$. Sa limite $\frac{1}{1 - \gamma_1} = \frac{1}{\gamma_2}$ pour $k \to \infty$ est alors la borne supérieure de la pente moyenne de $x(t)$ dans tous les intervalles contenus dans $(0, 1)$. Cette borne étant finie, la fonction $x(t)$ est absolument continue, et d'après un théorème bien connu, $x(t)$ est alors égale à l'intégrale de sa dérivée $x'(t)$ dont on sait qu'elle existe presque partout et qu'elle est égale (partout où elle existe) à la fonction $\frac{1}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}$ qui, d'après I, est continue dans tout l'intervalle $(0, 1)$. Il en résulte que $x'(t)$ existe partout, ce qui achève la démonstration de V.

Si $\gamma_2 = 1 - \gamma_1 \neq \frac{1}{2}$, la fonction $m(t)$ n'ayant pour aucune valeur de t une dérivée non nulle, les fonctions $x'(t)$ et $y'(t)$ jouissent de la même propriété.

Supposons maintenant que $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$. Considérons la parabole tangente aux côtés $S_0^0 S_1^0$ et $S_1^0 S_2^0$ de P_0 en leurs points milieux $M(0)$ et $M(1)$. En vertu d'une propriété bien connue, S_1^1 et S_2^1 étant les points milieux des segments $M(0) S_1^0$ et $S_1^0 M(1)$, cette parabole est tangente au côté $S_1^1 S_2^1$ de P_1 en son point milieu $M\left(\frac{1}{2}\right)$. Elle est ainsi tangente à chacun des côtés de P_1 en son point milieu. En raisonnant par récurrence, on voit pour la même raison qu'elle est tangente à chaque côté de P_n en son point milieu. Par suite, la courbe C est l'arc de cette parabole limité aux points $M(0)$ et $M(1)$. Son équation étant $(x + y)^2 - 4y = 0$, comme $x + y = 2t$, on a

$$y = t^2, \quad x = 2t - t^2 \quad \text{et} \quad m = \frac{t}{1 - t}.$$