

# 8. Projection des géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\bar{V}_4$ .

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Par suite, pour toute solution (7. 6) ou (7. 7), la quantité  $x^k \partial_k \mathcal{L}$  peut s'exprimer par une fonction L des variables  $x^k, \dot{x}^l, h$

$$(7,9) \quad L(x^k, \dot{x}^l, h) = \mathcal{L}[x^k, \dot{x}^l, \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)] - h \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)$$

et l'on a

$$\partial_k L = \partial_k \mathcal{L} + \partial_0 \mathcal{L} \partial_k \varphi - h \partial_k \varphi = \partial_k \mathcal{L}.$$

Ainsi, d'après (7. 8), les projections des  $(E_h)$  sur  $V_n$  sont définies par un système différentiel qui admet l'invariant intégral relatif

$$\pi = \partial_k L dx^k.$$

Autrement dit, elles sont extrémales de l'intégrale

$$(7.10) \quad \int_{z_0}^{z_1} L(x^k, \dot{x}^l, h) du$$

où  $h$  a la valeur choisie.

On appelle *descente* la correspondance qui à la fonction  $\mathcal{L}(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$  fait correspondre la fonction  $L(x^k, \dot{x}^l, h)$ . Le problème inverse est possible <sup>3)</sup>.

### 8. Projection des géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\bar{V}_4$ .

Nous supposons que la variété  $\bar{V}_4$  satisfasse aux hypothèses du paragraphe précédent. La fonction  $\mathcal{L}^2$  est définie par la relation

$$(8.1) \quad \mathcal{L}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

où le second membre est une forme quadratique non dégénérée comme on peut le vérifier. Etudions d'abord les extrémales correspondant aux valeurs de  $\dot{x}^\alpha$  pour lesquelles le second membre est positif. On sait d'ailleurs qu'il suffit qu'une géodésique le rende positif en un point pour qu'il en soit de même tout le long de la géodésique.

<sup>3)</sup> Voir A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Livre II, chap. premier.

Nous supposons que  $\bar{g}_{00}$  ne s'annule pas dans le domaine étudié. Le procédé de descente nous conduit à former l'équation

$$(8.2) \quad \frac{1}{2} \partial_0 \mathcal{L}^2 = \bar{g}_{00} \dot{x}^0 + \bar{g}_{0i} \dot{x}^i = h \mathcal{L}$$

et à éliminer  $\dot{x}^0$  entre cette équation et

$$(8.3) \quad L = \mathcal{L} - h \dot{x}^0.$$

En décomposant  $\mathcal{L}^2$  en carrés à partir de la variable directrice  $\dot{x}^0$ , il vient

$$\mathcal{L}^2 = \frac{1}{\bar{g}_{00}} \left( \frac{1}{2} \partial_0 \mathcal{L}^2 \right)^2 + \hat{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

où l'on pose

$$\hat{g}_{ij} = \bar{g}_{ij} - \frac{\bar{g}_{0i} \bar{g}_{0j}}{\bar{g}_{00}}$$

et l'on voit que  $\hat{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$  est négative si  $\bar{g}_{00} > 0$  et positive si  $\bar{g}_{00} < 0$ . Dans le premier cas on prendra  $h > \max \bar{g}_{00}$ . Comme  $\frac{1}{2} \partial_0 \mathcal{L}^2 = h \mathcal{L}$ , on tire l'équation

$$(8.4) \quad \mathcal{L} = \sqrt{\frac{\hat{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}}}$$

qui fournit  $\mathcal{L}$  en fonction des variables  $x^k, \dot{x}^l, h$ . De (8. 2), on tire ensuite

$$(8.5) \quad \dot{x}_0 = \frac{h}{\bar{g}_{00}} \mathcal{L} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}}.$$

On en déduit d'après (8. 3) et en vertu de (8. 4)

$$(8.6) \quad L = \varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} + h \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}}$$

où  $\varepsilon$  est le signe de  $\bar{g}_{00}$ .

L est bien une fonction de  $x^k, \dot{x}^l, h$  homogène et du premier degré par rapport aux  $\dot{x}^l$ . Elle définit sur la variété quotient  $\bar{V}_3$  une structure de variété finslérienne. Inversement, étant donnée localement dans  $\bar{V}_3$  la fonction  $L(x^k, \dot{x}^l, h)$  précédente, on démontre facilement qu'il existe une fonction  $\mathcal{L}(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$

homogène et de degré 1 par rapport aux  $\dot{x}^\alpha$ , qui par descente reconduit à L et que cette fonction est

$$\mathcal{L} = \sqrt{\bar{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}.$$

Les courbes extrémales correspondantes sont donc des géodésiques de  $\bar{V}_4$ .

Ainsi, les géodésiques de la variété riemannienne  $\bar{V}_4$  qui correspondent à l'intégrale première  $\partial_0 \mathcal{L} = h$  se projettent sur la variété quotient  $\bar{V}_3$  selon les extrémales de l'intégrale

$$(8.7) \quad \int_{z_0}^{z_1} \left( -\varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} + h \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) du$$

où  $h$  a la même valeur. Ces extrémales coïncident avec celles de

$$(8.8) \quad \int_{z_0}^{z_1} \left( \frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) du.$$

Le long de ces extrémales, on a d'après l'expression de  $\dot{x}^0$ :

$$(8.9) \quad dx^0 = \frac{h}{\bar{g}_{00}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}} \hat{g}_{ij} dx^i dx^j} - \frac{\bar{g}_{0i} dx^i}{\bar{g}_{00}}.$$

Ceci étant, on peut définir les géodésiques de longueur nulle de  $\bar{V}_4$  comme les courbes limites vers lesquelles tendent les géodésiques orientées dans le temps lorsque  $\mathcal{L} \rightarrow 0$ . De la relation  $h\mathcal{L} = \bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$ , il résulte que  $h \rightarrow \infty$  lorsque  $\mathcal{L} \rightarrow 0$  et  $h$  a le signe de  $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$ . Or

$$\mathcal{L}^2 \equiv \frac{1}{\bar{g}_{00}} (\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha)^2 + \hat{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0.$$

On en déduit que  $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$  a une valeur non nulle et garde un signe constant.

D'après (8.8), les projections des géodésiques de longueur nulle de  $\bar{V}_4$  sur  $\bar{V}_3$  sont les extrémales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \left[ \lim_{h \rightarrow \infty} \left( \frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{g}_{ij} x^i x^j - \frac{\bar{g}_{0i} x^i}{\bar{g}_{00}}} \right) \right] du .$$

En passant à la limite, on en déduit le lemme suivant

LEMME. — *Les géodésiques de longueur nulle de  $\bar{V}_4$  se projettent sur  $\bar{V}_3$  selon les extrémales de l'intégrale*

$$(8.10) \quad \int_{z_0}^{z_1} \left( \varepsilon \varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{g}_{ij} x^i x^j - \frac{\bar{g}_{0i} x^i}{\bar{g}_{00}}} \right) du$$

où  $\varepsilon$  est le signe de  $\bar{g}_{00}$  et  $\varepsilon'$  le signe de  $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$ .

D'après (8. 9), le long de ces extrémales on a

$$(8.11) \quad dx^0 = \varepsilon \varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{g}_{ij} dx^i dx^j - \frac{\bar{g}_{0i} dx^i}{\bar{g}_{00}}} .$$

On remarquera que  $dx^0 = Ldu$ .

Dans le cas où  $\bar{g}_{00}$  s'annule dans le domaine étudié, on obtient un énoncé analogue où (8. 10) et (8. 11) sont respectivement remplacées par

$$\int_{z_0}^{z_1} -\frac{\bar{g}_{ij} x^i x^j}{2 \bar{g}_{0i} x^i} du$$

et

$$dx^0 = -\frac{\bar{g}_{ij} x^i x^j}{2 \bar{g}_{0i} x^i} du .$$

### 9. Le principe de FERMAT.

Nous avons établi que les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne  $\bar{V}_4$ . Nous pouvons les interpréter géométriquement dans l'espace si le milieu considéré est en mouvement permanent. En effet, le lemme fournit une démonstration immédiate du théorème suivant

THÉORÈME. — *Si le mouvement du milieu considéré est permanent et tel que  $\bar{g}_{00} \neq 0$ , les rayons électromagnétiques dans*