

# 5. Etude des bicaractéristiques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On a ainsi

$$V^2 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2}$$

soit, en remplaçant  $\eta_1$  et  $\eta_0$  par leurs valeurs

$$V^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu}.$$

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques est donc égale à  $(\varepsilon \mu)^{-\frac{1}{2}}$ . Cette valeur appelle deux remarques. D'abord, elle généralise la valeur obtenue en électromagnétisme classique. De plus, dans nos hypothèses  $\varepsilon \mu \geq 1$ , la vitesse de propagation  $V$  est inférieure à une vitesse limite  $c = 1$ ; cette valeur coïncide avec la valeur de la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ( $\varepsilon \mu = 1$ ).

## 5. Etude des bicaractéristiques.

L'étude des variétés caractéristiques des équations de MAXWELL fait intervenir le champ de tenseur contravariant symétrique

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon \mu) u^\alpha u^\beta$$

dont la forme quadratique associée représente la forme caractéristique des équations de MAXWELL. Soit  $\bar{g}_{\alpha\beta}$  les coefficients de la forme conjuguée qui a pour expression

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) u_\alpha u_\beta.$$

Nous introduisons la métrique riemannienne dite *métrique associée*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Elle est de signature hyperbolique normale comme la métrique d'univers comme on peut le vérifier par un calcul direct en repère propre. Nous désignerons dans la suite par  $\bar{V}_4$  la variété riemannienne définie par la variété différentiable portant l'espace-temps  $V_4$  et munie de la métrique associée  $d\bar{s}^2$ . Nous

appellerons cône élémentaire associé  $\bar{C}_x$  en un point  $x$  le cône réel de directions tangentes à  $\bar{V}_4$  défini par l'équation  $d\bar{s}^2 = 0$ .

Dans l'espace riemannien  $\bar{V}_4$ , les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL définies localement par  $f(x^\alpha) = 0$ , sont solutions de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(5.1) \quad \bar{\Delta}_1 f \equiv \bar{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

Elles sont tangentes en chaque point au cône élémentaire associé  $\bar{C}_x$ . Les cônes élémentaires  $\bar{C}_x$  de  $\bar{V}_4$  sont donc cônes caractéristiques pour les équations de MAXWELL et celles-ci admettent pour variétés caractéristiques les variétés tangentes à ces cônes.

Une variété caractéristique  $V_3^M$ , c'est-à-dire une solution de (5.1), peut être engendrée au moyen des bandes caractéristiques de (5.1). Une telle solution peut être engendrée au moyen des bandes de  $\bar{V}_4$  constituées par l'ensemble d'une courbe  $\bar{L}_0$  et d'une famille à un paramètre de 3-plans élémentaires tangents à ces courbes. Les courbes  $\bar{L}_0$  sont appelées les bicaractéristiques des équations de MAXWELL.

Pour les déterminer, posons

$$2H(x^\lambda, y_\mu) = \bar{g}^{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta$$

et considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(5.2) \quad \bar{\Delta}_1 f \equiv 2H(x^\lambda, \partial_\mu f) = C$$

où  $C$  est une constante arbitraire. Relativement aux variables  $x^\alpha, f, y_\beta$  les bandes caractéristiques des équations de MAXWELL sont données par les solutions du système différentiel

$$\frac{dx^0}{\partial H} = \dots = \frac{dx^3}{\partial H} = \frac{df}{2H} = -\frac{dy_0}{\partial H} = \dots = -\frac{dy_3}{\partial H} = du$$

qui satisfont à l'intégrale première

$$2H(x^\lambda, y_\mu) = C$$

pour la valeur  $C$  de la constante. Si l'on introduit la variable auxiliaire  $u$ , les fonctions  $x^\alpha(u)$ ,  $y_\alpha(u)$  sont données par le système canonique

$$(5.3) \quad \frac{dx^\alpha}{du} = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \quad \frac{dy_\alpha}{du} = - \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}$$

relatif à la fonction hamiltonienne  $H(x^\lambda, y_\mu)$ . Le premier groupe des équations (5.3) s'écrit explicitement

$$(5.4) \quad \dot{x}^\alpha = \bar{g}^{\alpha\beta} y_\beta \quad \left( \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} \right).$$

Inversement

$$(5.5) \quad y_\beta = \bar{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha.$$

Cela posé, les solutions  $x^\alpha(u)$  de (5.3) sont extrémales de la fonction lagrangienne  $L$  définie par

$$2L = \bar{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

puisque, par passage des variables  $(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$  aux variables canoniques  $(x^\alpha, y_\beta)$  qui leur sont liées par (5.4) et (5.5), on a entre  $H$  et  $L$  la relation classique

$$H = \dot{x}^\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial L} - L = L.$$

Ces solutions sont les extrémales satisfaisant à l'intégrale première

$$(5.6) \quad 2L = C$$

pour la valeur  $C$  de la constante. Or, d'après l'existence de cette intégrale première, les extrémales ainsi définies sont aussi les extrémales de

$$\sqrt{2L} = \sqrt{\bar{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}$$

satisfaisant à (5.6). Il en résulte que les  $x^\alpha(u)$  définissent des géodésiques de  $\bar{V}_4$ . Si  $C = 0$ , le système différentiel aux caractéristiques de (5.1) admet l'intégrale première  $f = \text{const.}$  et

les variétés  $V_3^M$  peuvent être engendrées par les bandes de  $\bar{V}_4$  définies par les géodésiques de longueur nulle  $\bar{L}_0$ , le 3-plan élémentaire associé étant le plan tangent au cône élémentaire  $\bar{C}_x$  le long de la tangente à  $\bar{L}_0$ .

Nous avons démontré le théorème

THÉORÈME. — *Les bicaractéristiques des équations de MAXWELL sont les géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne  $\bar{V}_4$  munie de la métrique associée*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta .$$

Dans le langage de la théorie de la propagation par ondes, les variétés caractéristiques  $V_3^M$  jouent le rôle de surfaces d'ondes électromagnétiques. Les bicaractéristiques  $\bar{L}_0$  sont les rayons électromagnétiques associés. En introduisant l'indice de réfraction  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  du milieu, nous pouvons donc énoncer le résultat suivant

THÉORÈME. — *Dans un milieu transparent isotrope d'indice de réfraction  $n$  variable, les rayons électromagnétiques sont des géodésiques de longueur nulle de l'espace riemannien  $\bar{V}_4$  muni de la métrique*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \left( g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha u_\beta \right) dx^\alpha dx^\beta$$

où  $g_{\alpha\beta}$  est le tenseur métrique fondamental et  $u_\alpha$  le vecteur vitesse unitaire d'univers définis en chaque point du milieu considéré.

### III. ETUDE GÉOMÉTRIQUE

#### DES RAYONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS L'ESPACE

#### 6. Espace-temps stationnaire et mouvement permanent d'un fluide parfait chargé.

On dit que l'espace-temps  $V_4$  est *stationnaire* dans un domaine  $D_4$  si la variété riemannienne définie par  $D_4$  muni de la métrique d'univers  $ds^2$  admet un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales à trajectoires  $z$  orientées dans le temps,