

EULERS LEISTUNGEN IN DER MECHANIK

Autor(en): **Truesdell, C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-33748>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

EULERS LEISTUNGEN IN DER MECHANIK *

PAR

C. TRUESDELL, Bloomington

Es ist schwierig die Ziele, die Gedankengänge und die Ergebnisse eines Mathematikers zu erklären. In der reinen Mathematik ist es etwas leichter, wenigstens vor einem Publikum, das nicht allzu starke naturwissenschaftliche Vorurteile hat, da es in ihr gute Parallelen zu den Werten der schönen Künste oder auch der Philosophie gibt. Dagegen ist es in der Mathematik, die die Welt der Erscheinungen beschreiben soll, viel schwerer, weil hier die Zuhörer kaum dem heute verbreiteten Bild der technischen oder medizinischen Wissenschaft entgehen.

Dieses populäre Bild sieht den Gelehrten danach streben, die Lebensbedingungen der Menschen besser zu machen. Dafür, was „besser“ heissen soll, gibt es zwar verschiedene Theorien, da aber jedermann zustimmen wird; dass die Wissenschaft erstaunlich und erschütternd erfolgreich ist, dürfen wir annehmen, dass die „bessere“ Welt die heutige der immer grösseren Fabriken, Krankenhäuser und Bomben ist.

In diesem Sinn gilt Leonardo da Vinci als der grosse Vorgänger der Wissenschaft. Man sucht in seinen klaren Zeichnungen und dunklen Worten immer neue Vorahnungen der heutigen Technik, auch Prophezeiehungen der noch in der Zukunft zu erfindenden Maschinen. Seine Rätsel werden von einem grossen Publikum immer wieder wie eine heilige Schrift erwogen, vielleicht erklärt man noch, Leonardo hätte auch die nukleare Fission vorhergesagt.

* Dieser Vortrag, der an der in Basel zur 250. Wiederkehr des Geburtstags Eulers am 18. Mai 1957 stattfindenden Feier gehalten worden ist, wurde geschrieben, als der Autor ein Fellow of the John Simon Guggenheim Memorial Foundation war.

In dieser Weise dürfen wir uns Euler nicht nähern. Euler ist der grösste Mathematiker aller Zeiten; er war aber nur Mathematiker, d.h. kein Zauberer, kein Prophet, kein Heilender. Mathematik trieb er zwar in der Überzeugung, dass diese Welt schon nach den bestmöglichen, von einem guten Gott geschaffenen und geordneten Naturgesetzen beherrscht wird. Mit einer Unbefangenheit, die nur aus inniger Religiosität stammen kann und vielleicht auch nur in einer Zeit möglich war, die dem heutigen Ergebnis der Naturwissenschaft voranging, glaubte er, dass es eine besondere, dem Mensch von Gott gestellte Aufgabe sei, durch *Verstehen* dieser göttlichen Gesetze die dem Menschen prinzipiell verfügbaren Möglichkeiten zur Verbesserung zu entdecken und zu entwickeln. Verstehen muss aber der Anwendung unbedingt vorangehen; ein Experimentieren mit der Wohlfahrt des menschlichen Geschlechts wäre nicht das Werk Gottes, sondern des Teufels. Das grosse Buch der Natur liegt vor uns offen, es ist aber von Gott in einer Sprache geschrieben, die wir nicht sofort verstehen, sondern nur durch eigenen Fleiss, durch Liebe und Leid lesen lernen müssen. Diese Sprache ist die Mathematik. Das Buch der Natur ist nicht nur ein Codex Juris, es ist vielmehr ein grosses Lehrbuch, das nicht nur die von Gott niedergelegten Hauptgesetze, sondern auch gewisse von Gott gestellte Aufgaben enthält. Der erste Schritt des eine Sprache Lernenden ist das Lesen, erst nach tieferem Studium kann er fliessend sprechen und Fragen beantworten. Dann folgt der schwierigere Teil der Wissenschaft, diese mathematisch formulierten Aufgaben zu lösen. Bei der Klärung und Beantwortung dieser göttlichen Fragen ringt der Mensch letzten Endes um die besten Möglichkeiten, welche aus der festgelegten Ordnung der Welt folgen können.

Diese Anschauung der Wissenschaft ist keine Eigentümlichkeit Eulers, vielmehr zeigt sich hier nur die vollste Entfaltung eines Naturbildes, das bis Descartes zurück verfolgt werden kann und auch die meisten anderen grossen Geometer der Barockzeit mehr oder weniger begeistert hat. Da die Welt der Natur eine gute Welt ist, müssen ihre Gesetze schön sein. Die mannigfaltige Verwicklung des Erfahrungskomplexes soll die klare, allgemeine Einfachheit der Grundgesetze nicht vor uns

verbergen. Eine hässliche, wenn auch richtige Theorie ist doch keine endgültige. Heute fragt man manchmal, warum die Mechanik durch eine so vollkommene, einfache und elegante Theorie darstellbar ist, während andere, spätere Teile der theoretischen Physik, wie z.B. die Thermodynamik, immer etwas vag sind. Die Mechanik ist schön, weil die Geometer der Barockzeit sie schön geschaffen haben. Unter ihnen ist es besonders Euler gewesen, der nie mit einem verwickelten oder dunklen Grundprinzip zufrieden blieb. Ihm vor allen anderen verdanken wir den himmlisch klaren Aufbau der ganzen Mechanik und den göttlich einfachen Ausdruck ihrer fundamentalen Gesetze.

Aus diesem Streben nach Allgemeinheit dürfen wir keineswegs schliessen, dass Euler die Technik verachtete oder ignorierte. Es fiel mir viel leichter, auf populäre Weise über Eulers technische Entdeckungen zu reden. Ich könnte Ihnen berichten, wie im Jahre 1753 Euler bewies, dass unter allen zu jener Zeit vorgeschlagenen Methoden, ein Schiff ohne Wind fortzubewegen, die beste wäre, eine Radschaukel zu verwenden; das war viele Jahre vor dem Erscheinen des ersten Raddampfers. Zu den Möglichkeiten, die Euler als weniger leistungsfähig erkannte, gehört auch der Strahlantrieb, wobei der Strahl ein Wasserstrahl sein sollte. Ein Jahr später konstruierte Euler den Leitapparat für eine Turbine und entwarf er eine Maschine, die bei den angeblich praktischen Ingenieuren der Zeit völlig unbeachtet blieb. Als eine solche Turbine im Jahre 1944 von Herrn Ackeret gebaut wurde, arbeitete sie mit einem nur um wenigstens geringeren Wirkungsgrad als die beste moderne Maschine für gleiche Wasserverhältnisse und gleiche Kapazität. Im Jahre 1743 schuf Euler mit genialer Intuition eine Theorie der Stärke und Stabilität der Säule, die bis heute die Basis jeder Baukonstruktion bildet. Über solche mechanische Forschungen Eulers wäre es verhältnismässig leicht, eine allgemeine Festrede zu halten. Damit wäre aber Ihnen und auch der Mechanik kein guter Dienst geleistet. Dadurch bekämen Sie nicht nur ein unausgeglichenes Bild der Eulerschen Tätigkeit, sondern auch eine falsche Idee der Art, wie ein grosser Mathematiker die Mechanik aufbaut. Die erwähnten Arbeiten Eulers sind glänzend – sie sind aber glänzende Ausnahmen in seinem gesamten Beitrag

zur Mechanik. Solche wirklich praktischen Studien sind bei ihm, wenn nicht reine Einzelergebnisse, immer nur Nebenprodukte gründlicherer Gedankengänge, nie der Anstoss dazu oder ein Schritt danach.

In der geplanten Gesamtausgabe der Werke Eulers, deren erster Band schon 1911 erschienen ist, und die jetzt unter der energischen und weisen Leitung Herrn Speisers den Halbwegspunkt überschritten hat, ist die ganze zweite Serie, bestehend aus 31 Bänden, der Mechanik und der Himmelsmechanik gewidmet. Wenn wir dazu die mechanischen Arbeiten aus der dritten, physikalischen Serie und die schon in der ersten Serie erschienenen, aus der Mechanik entstandenen Abhandlungen über Differentialgleichungen hinzufügen, sehen wir, dass weit mehr als drei Viertel der Eulerschen Tätigkeit die Mechanik direkt betrifft. Ich bin nicht zuständig, über die astronomischen Anwendungen zu reden. Hier möchte ich Ihnen nur die Linien von Eulers enormer Forschung im Gebiet der reinen Mechanik aufzeigen.

Diese Forschung begann in Eulers neunzehntem oder zwanzigstem Lebensjahre mit der Dissertation über den Schall, welche er bei einem vergeblichen Bemühen um einen Basler Universitätslehrstuhl vorlegte. Aus dieser Arbeit sieht man, dass Euler von Anbeginn an die Mechanik im breitesten Sinne der ausgedehnten Medien, hier schwingenden Seiten und Luftsäulen, in Angriff genommen hat. Das Wertvollste dieser Abhandlung ist eine geniale, aber teilweise fehlerhafte Theorie des Flötentons. In der Geschichte der Wissenschaft ist oft ein grosser Fehler mehr wert als hundert kleine Wahrheiten. Es war eine bekannte Erfahrungstatsache, dass eine Pfeife und eine Geigensaite dieselben Obertöne besitzen. Euler schlug als Erklärung dafür vor, dass die Luftsäule in einer Pfeife wie eine Feder wirkt, die mit dem Gewicht der äusseren Luft belastet ist. Das stimmt, aber Euler irrte, als er annahm, dass die Elastizität der Luftsäule dem Luftdruck gleich sei. Nur aus einer umfassenderen Theorie der Luftbewegungen war die richtige Elastizität zu berechnen. Eulers fehlerhafter Schluss ist aber doch wichtig, denn mit seiner Hilfe leitete er eine Formel her, die als Vorbild des erwünschten Ergebnisses einer Schall-

theorie dienen konnte. Es ist auch typisch, dass Euler mit einzelnen, konkreten Fällen beginnt. Solange aber nicht gezeigt wird, dass er damit die schweizerische Flötenindustrie fördern wollte, dürfen wir nicht ein technisches Interesse an diesem Problem annehmen. Vielmehr suchte Euler hier, wie immer, das Phänomen zu *verstehen*.

Dreissig Jahre später gelang es Euler, dieses Problem richtig zu lösen. In der Zwischenzeit hatte er aber das ganze Gesicht der Mechanik verändert. In seinem in Petersburg geschriebenen Lehrbuch entwarf er die Mechanik punktförmiger Körper klar und streng; damals schrieb er auch, er habe vor, in aufeinanderfolgenden Bänden starre, biegsame, elastische und flüssige Körper zu behandeln. Er war aber noch nicht im Stande, die Bewegungen solcher Körper zu berechnen, weil *die Prinzipien* unzureichend waren.

Richtige mechanische Prinzipien waren zwar vorhanden; die theoretische Mechanik war zu Eulers Zeit schon eine alte Wissenschaft, die manche Triumphe gefeiert hatte. Für einen gegebenen Erfahrungskomplex, z.B. die Himmelsbewegungen, können immer mehrere befriedigende Theorien auf verschiedenen Grundlagen aufgestellt werden. Die Mechanik, die Euler als Jüngling lernte, kannte Theorien, die die beobachteten Tatsachen gut erklärten. Euler war aber damit nicht zufrieden. Für ihn sollte die Mechanik auch den Schall, die Gezeiten, die Kreiselbewegung einschliessen. Die Gezeiten sind nur besondere Bewegungen des Wassers, deshalb ist es eine notwendige Bedingung für eine gute Theorie des Wasserfließens, dass sie die Gezeiten als Spezialfall enthält. Es gab schon hydrodynamische Theorien. Als Euler und Daniel Bernoulli in Petersburg zusammen waren, hatten beide schon glänzende Arbeiten darüber geschrieben; Euler hatte die kleinen Schwingungen und die Stabilität eines Schiffs analysiert, Daniel Bernoulli hatte eine Methode ersonnen, den Wanddruck fließenden Wassers zu berechnen. Beide Theorien waren richtig, beide erklärten gewisse experimentelle Tatsachen, sie waren aber nicht nur von einander, sondern auch von den übrigen Teilen der Mechanik getrennt, und keine der beiden war auf die Gezeiten anwendbar.

Euler suchte eine *allgemeine* Theorie der Flüssigkeiten, die die Bewegungen des Wassers und der Luft nur als Spezialfälle mechanischer Bewegungen enthalten sollte, eine Theorie, die sich durch Spezialisieren aus allgemeinen Prinzipien der Mechanik herleiten, und deren Gültigkeit nicht nur ausgedehnte sondern auch diskrete Massen umfassen sollte. Dazu war es nötig, die damals existierenden mechanischen Prinzipien eingehend zu durchmustern, um dasjenige zu erkennen, welches als *allgemeines* Prinzip für *allgemeine* Körper dienen könnte. Das ist Euler erst im dreiundvierzigsten Lebensjahre, nach jahrzehntelangem Studium besonderer mechanischer Probleme und besonderer Teilgebiete der Mechanik gelungen. Sein Ergebnis ist das einfache Impulsgesetz, wie wir es jetzt in der Schule lernen. Es ist für uns heute vielleicht schwer, uns die Grösse dieser Eulerschen Leistung vorzustellen. Das Endergebnis ist einfach, von einer göttlichen Einfachheit. Deshalb ist es leicht zu verstehen, deshalb scheint es fast trivial. Was uns aber einfach scheint, muss ja erst von jemandem einfach gemacht worden sein. Das Buch der Natur ist für den einfach, der es lesen kann. Eulers Aufgabe war durch die Menge der schon vorhandenen guten aber speziellen Prinzipien für Teilgebiete der Mechanik schwierig gemacht, und erst später ist es augenscheinlich geworden, dass alle diese älteren Fälle sich durch spezielle Voraussetzungen aus dem allgemeinen Eulerschen Prinzip herleiten lassen. Es ist manchmal leichter, eine völlig neue Theorie zu schaffen, als ein teilweise richtig verstandenes aber schlecht zusammenhängendes Gebiet neu zu ordnen.

Mit Hilfe des allgemeinen Gesetzes des Impulses konnte Euler zu einem neuen Angriff auf das alte Problem der Hydromechanik schreiten. Um eine Theorie zu formulieren, welche die Bewegung des Wassers sowohl im Ozean als auch in einer Fontäne und gleichzeitig die Schwingungen der Luft beschreibt, war eine richtige Basis der allgemeinen Mechanik notwendig aber nicht hinreichend. Euler musste auch die verschiedenen Eigenschaften, die ein fluides Medium unter verschiedenen Umständen kennzeichnen, neu durchprüfen, um diejenigen auszuwählen, die für eine allgemeine Definition einer Flüssigkeit dienen können. Er erkannte, dass es nötig war, bevor er weiter

gehen könnte, eine Annahme über die inneren Kräfte in einer Flüssigkeit zu machen. Das ist nun schwer; *per definitionem* sind die Kräfte, die ein Teil der Flüssigkeit auf einen anderen ausübt, nicht messbar, da, wenn ein Messgerät eingeführt gedacht wird, der betrachtete Teil der Flüssigkeit kein innerer Teil mehr, sondern ein Teil ist, der sich an der Wand befindet. Eine Hypothese über die innere Kraftwirkung konnte Euler nur als Wagnis der Phantasie eines grossen Künstlers formulieren, dadurch, dass er in Gedanken in einen Flüssigkeitskörper hineinsah, wohin ja weder Auge noch Experiment reichen können. So schuf er die Theorie der idealen Flüssigkeit, die er als einen Körper definierte, der immer nur senkrechte Belastung, sei es an der Wand oder im Innern, erfährt. Der Begriff des Flüssigkeitsdruckes, den Euler hier einführte, verallgemeinerte eine schöne Idee der letzten Arbeit des alten Johann Bernoulli.

Diese Eulersche Theorie der Flüssigkeiten besitzt eine kaum zu überschätzende Wichtigkeit. Ihre Grundgesetze wurden von Euler in Form einiger einfacher und schöner Gleichungen formuliert, die mit knapper Erklärung auf eine Postkarte geschrieben werden könnten. Es ist eine der tiefsinnigsten Seiten des Buches der Natur. Erstens war es die erste Formulierung einer Teilauffassung der Erfahrungswelt mit Hilfe des Modells des kontinuierlichen Feldes. Zweitens hat die ideale Flüssigkeit als Musterbeispiel oder Ausgangspunkt für viele spätere physikalische Modelle bis in die heutige Zeit gedient. Drittens ist ein ganz neuer Zweig der reinen Analysis, die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, daraus entstanden. Dies sind alles verborgene, erst später bewiesene Folgerungen der Eulerschen Theorie. Praktische Folgerungen, die man einem Zeitgenossen hätte erklären können, gab es kaum. Obwohl Euler mit Leichtigkeit alle schon als richtig bekannten theoretischen Ergebnisse aus seiner neuen, allgemeinen Theorie herleitete, war er nicht in der Lage, damit ein einziges neues Problem von praktischer Wichtigkeit zu lösen. Insbesondere ist ihm eine Theorie der Gezeiten nicht gelungen. Deshalb haben ihm die Männer der Praxis seiner Zeit vorgeworfen, seine Theorie beweise nicht mehr als seine mathematische Klugheit. Nach seinem Tod jedoch haben andere Gelehrte die ersten befriedigenden Theo-

rien der Gezeiten aus seinen Gleichungen hergeleitet. Ein Jahrhundert später ist gezeigt worden, dass die meisten Eigenschaften eines Flugzeugs aus Eulers Theorie der idealen Flüssigkeit richtig ableitbar sind, und daraus ist die ganze theoretische Aerodynamik entstanden. Mit jedem Jahrzehnt findet man neue Anwendungen in den verschiedensten Gebieten, dem Schiffswesen, der Hydraulik, der Meteorologie, der Astronomie u.s.w. durch neue Partikulärlösungen der Eulerschen Gleichungen. Ich muss aber wieder bemerken, dass diese späteren Entwicklungen keineswegs von Euler selbst prophezeit worden sind, eher sind sie, wenn ich so sagen darf, eine mathematisch notwendige Folgerung einer richtigen Grundtheorie. Dass sich Euler der Wichtigkeit seiner Grosstat völlig bewusst war, können wir aus seinen eigenen Worten schliessen, die uns auch zeigen, nach welchem Ziele er strebte:

„La généralité que j’embrasse, au lieu d’éblouir nos lumières, découvrira plutôt les véritables loix de la Nature dans tout leur éclat, et on y trouvera des raisons encore plus fortes, d’en admirer la beauté et la simplicité.“

Mit seiner Hydrodynamik war Euler aber nicht zufrieden, da sie in der ersten Formulierung nicht allgemein genug war, um eine Theorie der Schallfortpflanzung in der Luft zu liefern. Er hatte mit dem Zustand in einem gegebenen Punkt des Raumes angefangen und das Phänomen so beschrieben, wie es einem Beobachter an diesem festen Punkt erscheint. Erst sieben Jahre später, 1759, bemerkte er, dass nur dann die Reziprokbewegung des Schalles sich einfach behandeln lässt, wenn man die Geschichte jedes Flüssigkeitsteilchens verfolgt. D.h., um eine richtige Theorie des Schalles aufzustellen, wollte Euler keineswegs bei experimentellen Tatsachen oder mit einem direkten Ansatz beginnen, vielmehr suchte und schuf er erst *eine ausführlichere Theorie der Flüssigkeitsbewegung im allgemeinen*. Mit der Hilfe dieser Theorie ist es ihm dann leicht gelungen, die allgemeinen Gleichungen der Schallausbreitung in der Luft zu gewinnen.

Auf diesem Gebiet hat Euler auch wichtige Einzelphänomene erklärt; insbesondere hat er das richtige Gesetz der

Obertöne einer Flöte hergeleitet, was er in seinem Jugendwerk vergeblich versucht hatte. Obwohl seine mathematischen Ausführungen einem modernen Leser klar und elegant erscheinen, waren sie für die an der Akustik interessierten Zeitgenossen zu schwer, deshalb sind diese schönen Leistungen bis in die letzten Jahre unbeachtet geblieben. Aus Eulers Fundamentalgleichungen ist die Akustik auf andere, weniger elegante Weise später von anderen entwickelt worden. Eulers Lösungen haben aber einen ungeheuren indirekten Einfluss auf die Mathematik selbst ausgeübt, denn gerade bei diesen Überlegungen hat Euler erstmals eingesehen, dass der alte, formale Begriff einer mathematischen Funktion zu beschränkt ist, und deshalb hat er den modernen Funktionsbegriff eingeführt, wie er heute in den meisten Gebieten der reinen und angewandten Mathematik verwendet wird.

In seinen frühen Jahren hatte Euler einige spezielle Probleme der Bewegung starrer Körper gelöst. Wie andere Gelehrte vor ihm hatte er spezielle Methoden gebraucht, da es keine allgemeine Theorie gab. Hier war das Erfahrungsmaterial besonders verwirrend: die häufigst vorkommenden Fälle betrafen entweder die Drehung eines symmetrischen Körpers um eine feste Achse oder die kleine Präzession, und gerade für diese Fälle passten die direkten Theorien; dennoch konnte schon damals jedes Kind wie heute an der allgemeinen Bewegung eines Kreisels ein scheinbar gesetzloses, tolles Benehmen beobachten. Hier half alles Experimentieren nichts; zum Verständnis der Kreiselbewegung braucht man erstens richtige allgemeine Prinzipien der Mechanik, zweitens deren strenge mathematische Behandlung, unter der Voraussetzung, dass die Gestalt des Körpers sich während der Bewegung nicht ändert. Sobald Euler das allgemeine Impulsgesetz besass — das war, wie oben bemerkt, im Jahre 1750 — konnte er sofort das Problem der allgemeinen Bewegung starrer Körper in Angriff nehmen. Die mathematische Durchführung war schwer. In seiner ersten Abhandlung darüber konnte er beweisen, dass die freie Drehung eines starren Körpers nur um ausgezeichnete Achsen erfolgen kann. Etwas später ist es ihm dann gelungen, die allgemeinen Kreiselgleichungen herzuleiten. Mit diesen Gleichungen sind

alle Bewegungsfälle eines Kreisels oder Gyroskops prinzipiell erklärbar.

Die Gleichungen waren richtig, wie auch die Herleitung, doch war Euler damit nicht zufrieden. Wie er später schrieb, fand er seine eigenen Ausführungen zu kompliziert. „Zu kompliziert“ heisst „nicht klar“, deshalb „nicht schön“, und also „nicht mit den Worten des Buchs der Natur gesagt“. Eine bemerkenswerte Verbesserung seiner Entdeckung hat Euler später in zwei Stufen erbracht.

1765 untersuchte er den allgemeinen Begriff der Trägheit. An die Seite des linearen Impulses setzte er eine zweite Art Impuls, den Drehimpuls, dessen *allgemeine* Theorie er dann ausführlich entwickelte. Er zeigte, dass es in jedem unsymmetrischen Körper genau drei Achsen gibt, um welche der Körper sich dauernd frei drehen kann, und dass diese Achsen auf einander senkrecht stehen. Es war dies ein frühes Beispiel einer Klasse von Problemen die wir heute „Eigenwertprobleme“ nennen, und die viele Teile der Mathematik und Physik beherrschen.

Als zweiten Schritt schlug Euler in seinem neunundsechzigsten Lebensjahr vor, anzunehmen, dass diese zweite Art Impuls einem eigenen unabhängigen Gesetz der Mechanik gehorche. In genau derselben Weise, wie die Kräfte den Impuls eines Körpers ändern, so ändern auch die Drehmomente seinen Drehimpuls. Diese beiden Eulerschen Prinzipien sind die Grundgesetze der ganzen Mechanik. Aus den beiden folgen unmittelbar Eulers frühere Gleichungen für die Bewegung starrer Körper, die nun auch mit ihrer Herleitung auf den Raum einer Postkarte geschrieben werden könnten. Die Bedeutung des zweiten Eulerschen Gesetzes reicht aber tiefer, da dieses Gesetz besondere Wichtigkeit für spätere Theorien besitzt, wie z.B. für die Elastizitätstheorie.

Bevor ich diesen Vortrag mit einer Würdigung des Eulerschen Gedankengangs schliesse, lassen Sie mich warnend betonen: Euler ist eine grosse, umfassende Erscheinung wie Shakespeare gewesen: jeder, der die Werke des einen oder des anderen lesen kann, macht sich ein eigenes, vielleicht wahres wenn auch unvollständiges Bild davon. In den Arbeiten Eulers kann man schönste Beispiele *jeder Art* mathematischen Denkens finden,

und es ist möglich, dass ein anderer Leser durch Auswahl anderer Eulerscher Forschungen zu einer anderen Auffassung gelangt.

Aus den wunderbaren mechanischen Untersuchungen, die sich über Eulers früheste bis zur letzten Tätigkeit erstrecken, schliessen Sie vielleicht, dass Euler nicht nur ein grosser Mathematiker, sondern auch ein grosser Physiker gewesen sein muss. Das mag richtig sein. Wenn wir aber seine Methoden studieren, so erscheinen sie uns anders als diejenigen, die wir bei einem Physiker erwarten. Obwohl die Mechanik manchmal als Teilgebiet der Physik betrachtet wird, kommt in Eulers Arbeiten überhaupt selten eine Verweisung auf experimentelle Angaben vor. In den bedeutenden, tiefergehenden Abhandlungen fehlt jede Tendenz, die Theorie mit Versuchsdaten zu vergleichen. Noch weniger gehören die Eulerschen Arbeiten zur sogenannten angewandten Mathematik, in der schon bekannte mathematische Methoden auf physikalische Probleme angewandt werden. Obwohl Eulers grösster Ruhm auf seinen glänzenden algebraischen Rechnungen beruht, findet man solche in den hier erwähnten Untersuchungen kaum. Ob er nur einfachste Schulmathematik verwenden, oder ob er einen neuen Zweig der Analysis begründen musste, war Euler bei seinen mechanischen Untersuchungen gleichgültig. Der Gewinn aus diesen Eulerschen Forschungen ist ungeheuer: einerseits sind daraus einige der schönsten Teile der reinen Mathematik, andererseits grosse Teile der Rechenkunst der heutigen Technik entstanden. Weder die einen noch die anderen waren Eulers Ziel. Die Mechanik trieb er als *eine unabhängige mathematische Wissenschaft, als rationale Mechanik* — wie sie schon von Newton genannt worden ist.

Eulers Methode ist leichter zu verstehen, wenn wir uns daran erinnern, dass die Geometrie einmal eine experimentelle Seite hatte. Die Griechen haben eine unabhängige mathematische Wissenschaft aus dem geometrischen Erfahrungsmaterial geschaffen. Die Geometer der Barockzeit und besonders Euler wollten ein ähnliches Programm für die Mechanik durchführen. Die Erfahrung besteht zum Teil aus physikalischen Daten und experimentellen Angaben, das ist aber bei weitem nicht alles. Das menschliche Gehirn ist *auch* erfahrungsfähig; es ist das Instrument, mittels dessen wir das physikalische Erlebnis

empfangen und behalten, und auch die Kenntnis einer vorangehenden Theorie desselben Erlebnisses oder eines analogen Phänomens kann einen wichtigen Teil des Erfahrungsmaterials eines Mathematikers bilden. Wenn wir das grosse, im achtzehnten Jahrhundert vorhandene Erfahrungsmaterial aller Art für die Mechanik in Betracht ziehen — alltägliche Erfahrung, Experimente, Maschinen, philosophischen und physikalischen Glauben, frühere Theorien — dann verstehen wir, dass die Ursache für die langsame, allmähliche Entwicklung der Eulerschen Mechanik nicht auf einem Mangel an experimenteller Begründung beruht, vielmehr spiegelt sie die Schwierigkeit wider, *genügenden Abstand* von der Menge des Erfahrungsmaterials zu gewinnen, um das Wesentliche daraus zu erkennen. In der Mechanik erscheint Euler nicht so sehr als Rechner oder Löser besonderer Probleme, vielmehr als der *Schöpfer der Begriffe*. Seine Leistungen in der Mechanik bilden einen Triumph der *mathematischen Denkweise*.

(Reçu le 23 juillet 1957.)
