3. Courbes, surfaces, volumes (définitions).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

L'auteur tient à souligner qu'il ne prétend à aucune originalité dans le présent article. L'idée des démonstrations présentées est bien connue en théorie des variétés différentiables; on la trouve également mentionnée brièvement dans la « Vorlesung von Prof. Dr. W. Pauli: Elektrodynamik », *VMP*, 1949, page 5. L'intention de cette publication est de montrer que l'adaptation de ces démonstrations au niveau élémentaire ne fait pas de difficulté et qu'il serait par suite souhaitable de les voir s'introduire dans les cours d'analyse vectorielle.

2. Préliminaires.

Nous utiliserons les formules du calcul vectoriel sans référence explicite. Citons cependant

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \,.\, \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = \textit{dét}\,(\mathbf{a}_i \,.\, \mathbf{b}_j) \,, \tag{2.1}$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel et $.$ le produit scalaire.

De l'analyse vectorielle, on utilisera la forme que prend la formule de dérivation des fonctions composées: Si f est une fonction de x_1, x_2, x_3 et que ces variables soient elles-mêmes des fonctions de u et v (par exemple), les dérivées partielles (si elles existent) de la fonction $f(u, v)$ qui prend en (u, v) la valeur de la fonction f au point $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$ sont données par

$$f_u = \nabla f \,.\, \mathbf{r}_u \,, \qquad f_v = \nabla f \,.\, \mathbf{r}_v \,, \tag{2.2}$$

où $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$, les lettres u et v en indice indiquant la dérivation partielle. On aura, en outre, besoin de la formule

$$\nabla \times f\mathbf{a} = \nabla f \times \mathbf{a} \qquad (\mathbf{a}, \text{ vecteur constant}). \tag{2.3}$$

3. Courbes, surfaces, volumes (définitions).

Dans la suite, un *morceau de courbe* sera une fonction $\mathbf{r}(t)$ définie pour $0 \leqq t \leqq 1$ qui fait correspondre à *toute* valeur de t dans cet intervalle un vecteur de l'espace noté $\mathbf{r}(t)$. On exige, en outre, que $\mathbf{r}(t)$ possède au moins une dérivée première continue. Si l'on appelle *application* une fonction définie continue pour *toute valeur* de l'argument dans un domaine fixé, on peut dire qu'un morceau de courbe est une application continûment différentiable du segment unité dans l'espace (vectoriel).

Une *courbe* est une combinaison linéaire finie de morceaux de courbe à coefficients entiers. Notation: $C = n_1 C_1 + n_2 C_2 + \dots + n_k C_k$, où $C_1, \dots, C_k$ sont des morceaux et $n_1, \dots, n_k$ des entiers. Une courbe est un objet algébrique: on peut additionner et soustraire des courbes en formant la somme ou la différence des combinaisons linéaires qui les définissent (les courbes forment un groupe abélien libre). Exemple: Soient C_1, C_2, C_3 des morceaux; $C_1 + 3C_2$, $C_2 - 2C_3$ sont des courbes dont la différence est $C_1 + 2C_2 + 2C_3$ (on écrit $-C$ au lieu de $(-1)C$ pour simplifier les notations).

Les définitions sont analogues pour surfaces et volumes: un *morceau de surface* est une application continûment différentiable du carré unité dans l'espace, c'est-à-dire un vecteur $\mathbf{r}(u, v)$ fonction de deux paramètres u et v défini pour $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$, tel que les dérivées partielles $\mathbf{r}_u$ et $\mathbf{r}_v$ existent et soient continues pour toutes valeurs de u et v dans les limites assignées. Une *surface* est par définition une combinaison linéaire finie à coefficients entiers de morceaux. Notation: $S = n_1 S_1 + n_2 S_2 + \dots + n_k S_k$, où les $S_1, \dots, S_k$ sont des morceaux et $n_1, \dots, n_k$ des entiers.

Un *morceau de volume* est une application différentiable du cube unité dans l'espace. Un *volume* est une combinaison linéaire finie à coefficients entiers de morceaux de volume.

4. Remarques et conventions de calcul.

On n'exige pas que les applications $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}(u, v)$ ou $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ soient biunivoques. En fait, on n'a même pas exigé que les dérivées partielles soient linéairement indépendantes. Un exemple extrême est celui où l'une des dérivées partielles est identiquement nulle.

On dira que le morceau de courbe C, représenté par $\mathbf{r}(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$ est *dégénéré*, si $\mathbf{r}^{\cdot}$ (la dérivée par rapport à t) est identiquement nulle (dans l'intervalle de définition $0 \leqq t \leqq 1$). De même, le morceau de surface S, donné par $\mathbf{r}(u, v)$, $0 \leqq u, v \leqq 1$