2.2. L'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Théorème 3 (Kamke [2]): Soit (F) une structure feuilletée de classe C^r du plan R^2. Soit Ω un ouvert borné du plan. Il existe une fonction numérique ψ définie dans Ω et qui vérifie les propriétés suivantes:

(i) ψ est r-différentiable et le gradient de ψ est différent de 0 en tout point de Ω;

(ii) ψ est constante sur les feuilles de la structure feuilletée induite par (F) sur Ω.

Théorème 4 (Wazewsky [7]): On peut munir le plan R^2 d'une structure feuilletée de classe C^∞ telle que toute fonction r-différentiable sur R^2 et qui est constante sur les feuilles de la structure feuilletée se réduise à une constante.

Nous ne reproduirons pas la démonstration du théorème 1, mais nous montrerons dans 2.2 et 2.3 que les théorèmes 2, 3 et 4 sont des conséquences du théorème 1 et des propriétés des variétés à une dimension établies dans la première partie.

Exemples de structures feuilletées du plan:

1. Les droites $y = \text{Cte}$ sont évidemment les feuilles d'une structure feuilletée du plan;
2. Soit C une courbe de Jordan dans le plan R^2. La structure feuilletée précédente induit sur l'ouvert limité par C et qui est homéomorphe à R^2 une structure feuilletée analytique;
3. Le complémentaire U dans R^2 de l'ensemble des points de coordonnées $x = 0$, $y \geqslant 0$ est homéomorphe à R^2. Les composantes connexes des lignes de niveau de la fonction $\psi = xy$ sont les feuilles d'une structure feuilletée analytique de U.

2.2. *L'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan.*

La proposition suivante est une conséquence essentielle du théorème 1 de 2.1.

Proposition 1: *Soit* (F) *une structure feuilletée du plan* R^2. *L'espace quotient* V *de* R^2 *par la relation d'équivalence* ρ *associée* *au feuilletage (cf. définition 2 de 2.1) est une variété à une dimension à base dénombrable et simplement connexe. Si* (F) *est une structure feuilletée différentiable de classe* C^r *(ou analytique), l'espace des feuilles* V *est muni canoniquement d'une structure de variété à une dimension différentielle de classe* C^r *(ou analytique).*

Comme R^2 est connexe et à base dénombrable, V est également connexe et à base dénombrable. Pour montrer que V est une variété à une dimension, il suffit de vérifier que tout point z de V admet un voisinage ouvert homéomorphe à la droite numétique. Soit π la projection canonique de R^2 sur V; la feuille $\pi^{-1}(z)$ rencontre au moins un ouvert distingué 0_i. La relation d'équivalence induite par ρ dans 0^i est, d'après le théorème 1, la relation ρ_i. Donc $\pi(0_i)$ qui est un voisinage ouvert de z, puisque ρ est une relation d'équivalence ouverte, est homéomorphe à $0^i/\rho_i$, c'est-à-dire à la droite numérique.

En vertu du théorème de Jordan, le complémentaire de toute feuille (qui est un sous-ensemble fermé de R^2) a deux composantes connexes; le complémentaire de tout point de V a donc également deux composantes connexes. Cette propriété est équivalente au fait que V est simplement connexe (cf. 1.2, lemme).

Soit A un atlas définissant sur R^2 la structure feuilletée différentiable considérée et soit $\overline{h}_i$ la restriction de la carte $h_i \in$ A à la droite $x = 0$. L'ensemble des cartes $\pi\overline{h}_i$ de R dans V est un atlas qui définit sur V une structure différentiable.

Le lecteur pourra construire à titre d'exercice l'espace des feuilles des structures feuilletées du plan définies dans les exemples ci-dessus.

2.3. *Application des résultats de 1. aux structures feuilletées du plan.*

Démonstration du théorème 2.

Le théorème 2 de 2.1 (Kaplan) est une conséquence immédiate de la proposition 1 de 2.2 et de la proposition 1 de 1.2. Soit f une application qui étale l'espace quotient R^2/ρ dans R; l'application $\varphi = f\pi$ est une fonction numérique sur R^2 qui satisfait aux conditions du théorème 2.