1re Partie

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Le rapprochement que nous avons entrepris entre de nombreux problèmes n'est pas d'ailleurs strictement limité au cadre de cette géométrie combinatoire. C'est un petit noyau de tout un ensemble de questions qui peut exercer une impulsion singulière en raison de la simplicité des propriétés et de l'aspect purement combinatoire de leurs hypothèses.

C'est pour suivre cette directive et pour nous conformer à la tendance qui fait passer méthodiquement et rationnellement du domaine des mathématiques classiques à des procédés plus modernes et à des possibilités attrayantes, que nous présentons au lecteur les exemples qui suivent.

Ils ne supposent, en plus des principes généraux de la géométrie élémentaire et de la théorie des nombres réels, que peu de connaissances préalables. Il est utile cependant d'être familiarisé avec la notion d'ensemble et plus spécialement avec celle des ensembles de points. Quelques définitions sont, éventuellement, précisées dans le texte.

Dans la première partie on a donné un choix de théorèmes, groupés par énoncés, sans démonstration, mais avec un commentaire et des références. Dans la deuxième partie, on trouvera les démonstrations, ou tout au moins leurs esquisses. Les lecteurs qui s'y intéresseront particulièrement, pourront se reporter aux nombreux travaux indiqués et poursuivre eux-mêmes la recherche des problèmes qui ne sont pas encore résolus et dont nous avons signalé quelques-uns.

Nous espérons avoir ainsi éveillé chez les lecteurs un intérêt plus grand pour des questions passionnantes et avoir augmenté l'efficacité des liens qui existent entre les connaissances élémentaires de la géométrie et la recherche scientifique.

1re Partie

Un premier groupe de quatre théorèmes concerne des conditions d'appartenance de points à une droite ou à une circonférence.

1. *Pour que les points d'un ensemble, en nombre fini (au moins égal à trois), soient alignés, il suffit (et il faut, manifestement)* *que, pour chaque couple d'entre eux, la droite qui les joint contienne au moins un troisième point, distinct, de l'ensemble.*

De ce théorème, entrevu en 1893 par J. J. SYLVESTER [55], il existe une brève démonstration de T. GALLAI (Grunwald) citée par N. G. DE BRUIJN-P. ERDÖS [6]; elle en fait une application d'un théorème purement combinatoire. On trouvera d'autres démonstrations ainsi que des généralisations et des variantes dans les travaux cités de P. ERDÖS [11]; H. S. M. COXETER [7]; G. A. DIRAC [9] et Th. MOTZKIN [39].

2. *Pour que les droites d'un ensemble, en nombre fini (au moins égal à trois), soient concourantes, il suffit (et il faut, manifestement) que, pour chaque couple d'entre elles, passe par leur point d'intersection au moins une troisième droite, distincte, de l'ensemble.*

Les conclusions de ces théorèmes **1** et **2** ne sont plus vraies lorsque les ensembles de points ou de droites ont un nombre infini d'éléments. C'est ce que montre, pour les deux énoncés à la fois, l'exemple de la figure 1 qui représente un ensemble infini dénombrable de points et de droites.

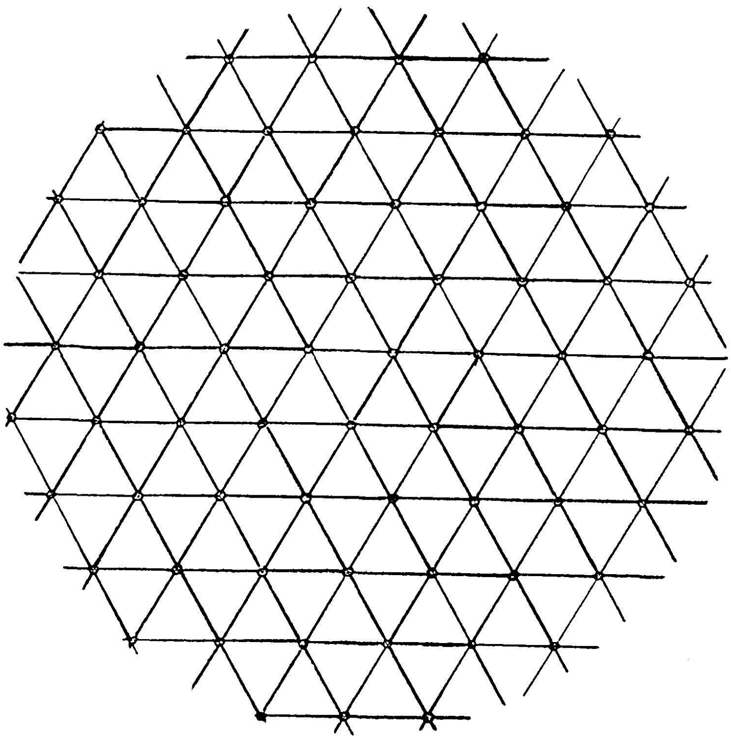

FIG. 1

3. *Pour que les points d'un ensemble, en nombre fini (au moins égal à quatre), appartiennent à une même circonférence, il suffit (et il faut, manifestement) que pour chaque combinaison de trois d'entre eux, la circonférence (qui peut être dégénérée en droite) qui les contient, contienne au moins un quatrième point, distinct de l'ensemble.*

Etroitement apparenté au théorème **3**, dans ses hypothèses et sa conclusion, le théorème suivant concerne un ensemble de points, borné (c'est-à-dire contenu dans un cercle de rayon fini) et fermé (c'est-à-dire contenant ses points d'accumulation).

4. *Pour que les points d'un ensemble borné et fermé, en nombre fini ou infini, appartiennent à une même circonférence, il suffit (sans que cela soit nécessaire) que l'axe de symétrie de chaque couple d'entre eux soit axe de symétrie de tout l'ensemble.*

Les conclusions des théorèmes **3** et **4** ne sont plus vraies lorsque l'ensemble de points n'est pas borné. L'ensemble de tous les points du plan en est un exemple. On peut aussi constituer un ensemble dénombrable de points, non fermé, qui vérifieles autres hypothèses des théorèmes **3** et **4** sans que ces points appartiennent à une même circonférence:

En partant d'un système A_0 de quatre points, qui ne sont ni alignés ni sur une même circonférence, on construit par récurrence une suite ascendante d'ensembles de points $A_n = \varphi(A_{n-1})$. L'expression $\varphi(A)$ désigne la réunion des ensembles symétriques de A relativement à chacun des axes de symétrie de tous les couples de points de A. On voit aisément que la réunion des A_n est un ensemble dénombrable de points, en nombre infini, qui possède la propriété de symétrie du théorème **4**. En outre, toute circonférence passant par trois points de l'ensemble contient un quatrième point distinct, sauf si ces trois points forment un triangle équilatéral. On peut même éviter cette exception par une généralisation très simple de la construction $\varphi(A)$.

* * *

Nous indiquons maintenant une série de théorèmes dans lesquels les longueurs ont pour mesures des nombres entiers ou rationnels.

On appelle « réseau » plan l'ensemble des points dont les coordonnées relatives à deux axes rectangulaires d'un plan sont des nombres entiers.

5. *Le carré est le seul polygone régulier qui peut être inscrit dans un réseau ; c'est-à-dire dont on peut choisir les sommets parmi les points d'un réseau.*

Une démonstration originale a été donnée par W. SCHERRER [52]; en ce qui concerne l'impossibilité d'inscrire un triangle dans un réseau, on peut voir aussi le problème 238 de G. PÓLYA-G. SZEGÖ [43] Vol. 2, p. 156.

La possibilité d'inscription d'un carré, en dehors du cas trivial, est en évidence dans la figure 2.

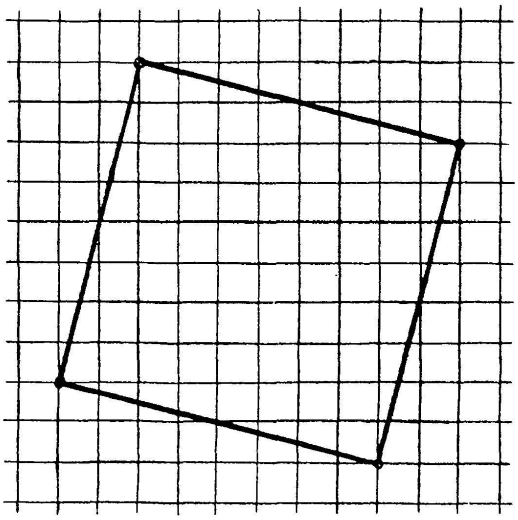

FIG. 2

Le théorème suivant concerne les angles d'un losange inscrit dans un réseau.

6. *Pour tout losange, non carré, d'angle aigu α, inscrit dans un réseau, le rapport α/π est irrationnel. Autrement dit, le carré est le seul losange inscrit dans un réseau dont les angles sont commensurables avec π.*

En relation étroite avec le précédent, l'énoncé suivant concerne les triangles de Pythagore, c'est-à-dire les triangles rectangles dont les trois côtés ont des longueurs proportionnelles à des nombres entiers.

7. *Dans tout triangle de Pythagore les angles aigus sont incommensurables avec π.*

Les théorèmes **6** et **7** sont des expressions géométriques de la propriété trigonométrique suivante: (Cf. H. Hadwiger [18]):

8. *Le seul angle aigu commensurable avec π dont le cosinus est un nombre rationnel est $\alpha = \pi/3$.*

Le théorème suivant dû à P. Erdös [12] (Voir aussi A. Delachet [8] p. 50 et E. Trost [57]) est un exemple particulièrement typique d'énoncés d'un type nouveau en ce sens que d'hypothèses très simples résulte une conséquence inattendue et précise.

9. *Pour que les points d'un ensemble, en nombre infini, soient alignés, il suffit que, pour chaque couple d'entre eux, la longueur de leur segment soit un nombre entier.*

Il y a lieu de remarquer que cette conclusion ne subsiste pas si les points sont en nombre fini k, même très grand. On peut même, pour toute valeur de k, construire un ensemble de k points dont les distances mutuelles sont mesurées par des nombres entiers, sans qu'aucune des combinaisons de trois d'entre eux n'appartienne à une droite. De telles constructions ont été faites à maintes reprises, notamment par M. Altwegg [1], A. Müller [40] et F. Steiger [53].

D'après A. Müller, on peut construire un ensemble dénombrable de points, dense sur une circonférence de rayon 1 et tel que la longueur du segment de chaque couple d'entre eux soit un nombre rationnel. Ce sont les points P_n de coordonnées polaires: $\rho = 1$ $\varphi = 2n\theta$ avec $\cos\theta = 4/5$.

D'après le théorème **8**, l'angle θ est incommensurable avec π; tous les points P_n sont différents sur la circonférence de rayon 1; ils forment un ensemble dense qui est même de répartition uniforme d'après le théorème d'équipartition de H. Weyl (ce qui est toutefois sans importance pour le théorème considéré). La distance de deux points est:

$$d(P_n, P_m) = 2 \left| \sin (n - m)\theta \right| \text{ avec } \sin\theta = 3/5, \cos\theta = 4/5.$$

Elle est rationnelle par application des formules de multiplication des arcs. Dans un tel ensemble il suffit de prendre k points. Avec un choix convenable de l'unité les longueurs des segments qui joignent ces points deux à deux sont des nombres entiers et cependant aucune combinaison de trois de ces points n'appartient à une droite.

* * *

Les théorèmes du groupe suivant sont relatifs aux enveloppes et à la séparation des ensembles de points. Précisons d'abord quelques notions: un ensemble de points est convexe si, pour chaque couple de ses points, tous les points du segment joignant les points du couple appartiennent à l'ensemble.

L'enveloppe convexe d'un ensemble de points est le plus petit ensemble convexe qui le contient; il est équivalent de dire que c'est l'intersection de tous les ensembles convexes qui le contiennent.

10. *Pour qu'un point appartienne à l'ensemble convexe d'un ensemble de points, en nombre fini ou infini, il faut (et il suffit) qu'on puisse trouver un, deux ou trois points de l'ensemble dont l'enveloppe convexe contienne ce point.*

Il résulte de cet énoncé que l'enveloppe convexe d'un ensemble de points est la réunion des domaines triangulaires (triangles, périmètres compris) définis par toutes les combinaisons de trois points de l'ensemble. (Y compris les combinaisons avec répétition.)

11. *Pour qu'un point soit « intérieur » à l'enveloppe convexe d'un ensemble de points (non alignés), il faut et il suffit qu'on puisse trouver trois ou quatre points de l'ensemble tels que le point considéré soit intérieur à leur enveloppe convexe.*

Les énoncés **10** et **11** sont des cas particuliers, dans le plan, de théorèmes généraux établis par E. Steinitz [54] et W. Gustin [17]. Cf aussi O. Hanner-H. Radström [20] et C. V. Robinson [49].

Deux ensembles sont « séparables » s'il est possible de trouver une droite qui ne traverse aucun des deux et les sépare l'un de l'autre. Il est équivalent de dire qu'ils sont situés dans chacun des demi-plans limités par la droite (limite exclue). Cette propriété est caractérisée par le critère suivant établi par P. KIRCHBERGER [29]. (Cf. aussi H. RADEMACHER-I. J. SCHOENBERG [44]):

12. *Pour que deux ensembles, fermés et bornés, soient séparables, il suffit (et il faut) qu'il en soit de même pour chacun des couples de leurs sous-ensembles respectifs dont la réunion comprend au plus quatre points.*

13. *Tout ensemble de points, comprenant au moins quatre points, peut être regardé comme la réunion de deux sous-ensembles, non vides, sans point commun et non-séparables.*

Voir à ce sujet F. W. LEVI [36] et R. RADO [46].

* * *

Les propriétés suivantes gravitent autour du célèbre théorème de HELLY. Les nombreuses variantes de même type, concernant en général des « ovales », forment une théorie caractéristique de la géométrie combinatoire convexe. On appellera « ovale » (Eibereich) un ensemble de points convexe, borné et fermé.

14. *Pour que tous les ovales d'un ensemble (en nombre fini ou infini) aient (au moins) un point commun, il suffit (et il faut) qu'il en soit ainsi pour chaque combinaison de trois d'entre eux.*

C'est l'application au plan du théorème connu de HELLY. Cf. E. HELLY [21], J. RADON [48], D. KÖNIG [35]... etc. Des exemples simples montrent qu'il est impossible de remplacer les combinaisons de trois ovales par des couples; sauf s'il existe des conditions supplémentaires sur la forme des ovales.

C'est le cas de l'énoncé suivant:

15. *Pour que tous les rectangles (ou les parallélogrammes), à côtés respectivement parallèles, d'un ensemble (en nombre* *fini ou infini) aient (au moins) un point commun, il suffit (et il faut) qu'il en soit ainsi pour chaque couple d'entre eux.*

En déplaçant par translation un ovale qui n'est pas un parallélogramme, on peut obtenir trois ovales n'ayant pas de point commun mais tel que chaque couple de ces trois ovales aient au moins un point commun. Toutefois cela est impossible pour des parallélogrammes. L'énoncé **15**, légèrement modifié, est donc une propriété caractéristique des parallélogrammes. Cf. à ce sujet B. Sz.-Nagy [41].

L'application à la droite du théorème de Helly est un cas particulier du théorème **15**.

16. *Pour que les segments, appartenant à une même droite, d'un ensemble (en nombre fini ou infini) aient (au moins) un point commun, il suffit (et il faut) qu'il en soit ainsi pour chaque couple d'entre eux.*

On peut facilement, et en vue de nombreuses applications, établir pour la circonférence un théorème du même type que celui de Helly. On y remplace les ovales par des arcs « fermés », c'est-à-dire extrémités comprises, appartenant, bien entendu, à une même circonférence.

17. *Pour que les arcs, inférieurs à une demi-circonférence, d'un ensemble (en nombre fini ou infini), appartenant à une même circonférence, aient (au moins) un point commun, il suffit qu'il en soit ainsi pour chaque combinaison de trois d'entre eux.*

La condition de longueur des arcs est essentielle, car la propriété n'est plus vraie pour un ensemble de demi-circonférences. Il suffit, en effet, de considérer les quatre demi-circonférences limitées par deux couples de points diamétralement opposés. Elles n'ont pas de point commun et cependant chacune des combinaisons de trois d'entre elles en a au moins un.

De même la propriété n'est plus vraie, sans modifications, pour des couples d'arcs. Il suffit de considérer le découpage d'une circonférence en trois arcs égaux: ceux-ci sont sans point commun et cependant chaque couple a un point commun.

La propriété peut devenir vraie pour les couples par une limitation plus stricte de la longueur des arcs:

18. *Pour que les arcs, inférieurs à un tiers de circonférence, d'un ensemble (en nombre fini ou infini), appartenant à une même circonférence, aient (au moins) un point commun, il suffit qu'il en soit ainsi pour chaque couple d'entre eux.*

On peut encore énoncer une propriété analogue, de conclusion un peu différente, sans condition de limitation de longueur des arcs.

19. *Pour qu'il existe (au moins) un diamètre qui coupe tous les arcs d'un ensemble, appartenant à une même circonférence, il suffit que chaque couple de ces arcs ait (au moins) un point commun.*

Il est équivalent de dire que si cette condition suffisante est remplie, on peut trouver deux points diamétralement opposés tels que tout arc de l'ensemble contienne (au moins) l'un des deux. Des théorèmes analogues ont été établis, entre autres, par C. V. Robinson [49] et A. Horn-A. Valentine [25]. De belles applications, signalées ci-dessous, ont été données par P. Vincensini [59].

20. *Pour qu'on puisse trouver une translation amenant un ovale donné à être contenu dans l'intersection d'un ensemble d'ovales il suffit que, pour chaque combinaison de trois ovales de l'ensemble il existe une telle translation.*

21. *Pour qu'on puisse trouver une translation amenant un ovale donné à rencontrer tous les ovales d'un ensemble, il suffit que, pour chaque combinaison de trois ovales de l'ensemble il existe une telle translation.*

22. *Pour qu'on puisse trouver une translation amenant un ovale donné à contenir tous les ovales d'un ensemble (ou leur réunion), il suffit que, pour chaque combinaison de trois ovales de l'ensemble il existe une telle translation.*

Ce sont des applications au plan de variantes plus générales du théorème de Helly énoncées par P. Vincensini [58] et

V. L. Klee jr. [32] pour des hyper-espaces. Les théorèmes ne sont vrais, dans le plan, que pour des déplacements de translation et ne s'appliquent plus pour des rotations.

Voici notamment, un contre-exemple du théorème **21**. On considère un ensemble de n cercles ($n > 2$) dont les centres ont

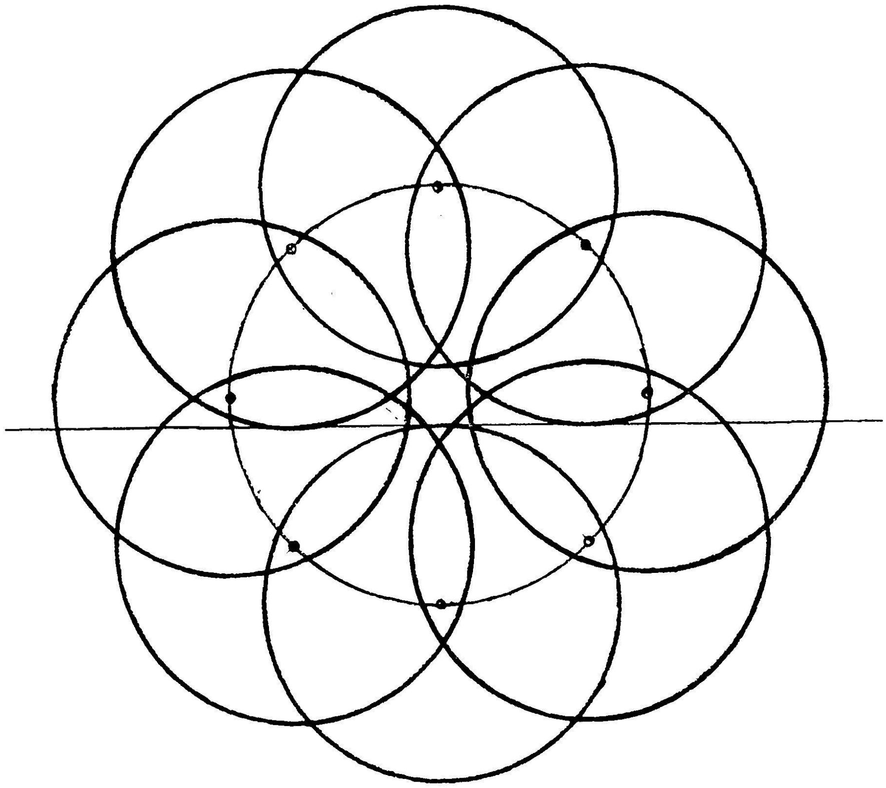

Fig. 3

pour coordonnées polaires: $\rho = 1$ et $\varphi = 2k\pi/n$ ($k = 1, \ldots, n$) et dont les rayons sont $r = \cos^2(\pi/n)$ si n est pair et

$$r = \cos^2(\pi/n) + \cos^2(\pi/2n) - 1$$

si n est impair. On peut alors vérifier qu'il est toujours possible, par un déplacement, non reductible à une translation, d'amener un segment de droite de longueur 2 (ce qui est un ovale aplati) à traverser chacune des combinaisons de $n - 1$ cercles; mais qu'il est impossible de lui faire traverser les n cercles en même temps.

La figure 3 illustre cet exemple pour $n = 8$.

23. *Pour que, par un point quelconque du plan, on puisse toujours faire passer une droite rencontrant tous les ovales d'un* *ensemble, il suffit que chaque couple de ces ovales ait (au moins) un point commun.*

24. *Pour que, parallèlement à une direction quelconque du plan, on puisse toujours mener une droite rencontrant tous les ovales d'un ensemble, il suffit que chaque couple de ces ovales ait (au moins) un point commun.*

Ces deux énoncés sont aussi des cas particuliers, pour le plan, de théorèmes plus généraux de A. Horn [24] et de V. L. Klee jr [30]. Ils donnent des exemples de propriétés entraînées par « une condition suffisante de Helly » vérifiée par des couples au lieu de combinaisons de trois ovales.

On peut aussi se demander s'il est possible d'obtenir un théorème analogue à celui de Helly en remplaçant la recherche d'un point commun par celle d'une sécante commune. L'existence d'une droite rencontrant tous les ovales d'un ensemble peut-elle résulter de l'existence d'une sécante commune à chaque combinaison d'un certain nombre h de ces ovales ?

Une telle propriété n'existe pas. Et c'est ainsi que L. A. Santaló [50] a montré qu'il est possible de construire un ensemble de n ovales, sans sécante commune et tel cependant qu'il en existe une pour chaque combinaison de $n - 1$ de ces ovales.

C'est aussi ce que prouve l'exemple indiqué à propos de l'énoncé **21**. On peut cependant obtenir des théorèmes de ce genre en ajoutant des conditions supplémentaires pour la forme et pour la position des ovales. C'est ainsi que L. A. Santaló [50] a démontré que, pour un ensemble de rectangles à côtés parallèles, il existe une sécante commune s'il en existe une pour chaque combinaison de six de ces rectangles. C'est aussi le cas de l'énoncé suivant:

25. *Pour qu'il existe une droite « montante » traversant tous les rectangles à côtés parallèles d'un ensemble, il suffit qu'il en soit ainsi pour chaque combinaison de trois rectangles de l'ensemble.*

Par droite « montante » on entend une droite qui a un coefficient angulaire positif par rapport à un système d'axes parallèles aux côtés des rectangles, comme l'indique la figure 4.

Dans l'exemple de la figure 3 qui prouve qu'il n'existe pas, dans le cas général, de nombre de Helly pour une condition suffisante d'existence d'une sécante commune à un ensemble d'ovales, on peut remarquer que les ovales se recouvrent partiellement les uns les autres. On peut se demander si cette circonstance n'est pas trop particulière et étudier le cas où les ovales n'ont, deux à deux, aucun point commun. A cette question qui a été posée par V. L. Klee [33] la réponse est négative.

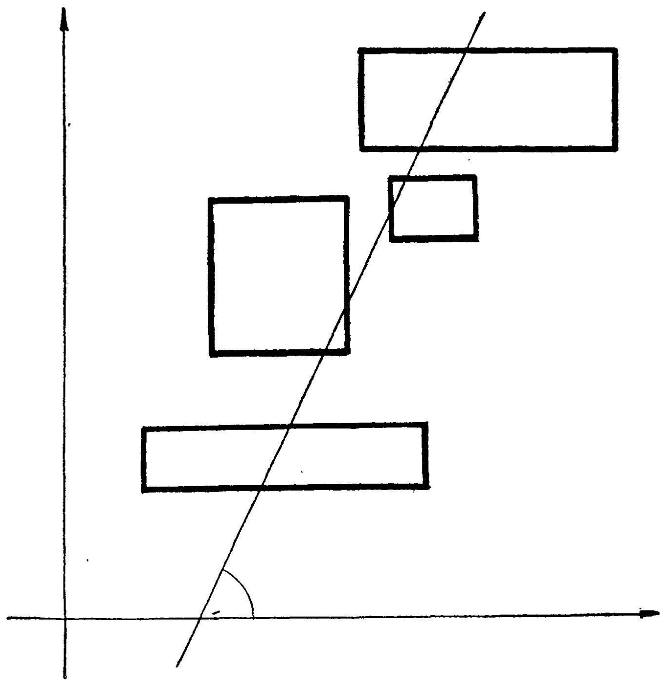

Fig. 4

Pour le montrer, on peut construire une rosace de segments circulaires. Sur $2n$ $(n > 1)$ circonférences concentriques K_i (i de 1 à $2n$) de centre Z et de rayons R_i $(0 < R_i \leqslant R_{i+1})$ on construit des couples de segments S_i et S_i^* symétriques par rapport à Z. Chaque segment est défini par les coordonnées polaires des points de l'arc qui le limite sur le cercle R_i:

$$S_i \quad \rho = R_i; \ (i - n + 1)\ \pi/2n \leqslant \varphi \leqslant (i + n - 1)\ \pi/2n$$
$$S_i^* \quad \rho = R_i; \ (i + n + 1)\ \pi/2n \leqslant \varphi \leqslant (i + 3n - 1)\ \pi/2n.$$

Cette rosace vérifie les propriétés suivantes:

A. En choisissant convenablement l'accroissement des rayons R_i, on peut construire des segments sans point commun deux à deux. La figure 5 en donne un exemple pour $n = 2$.

B. Il n'existe aucune droite traversant les $4n$ segments. Un diamètre d'angle polaire compris dans l'intervalle $0, \pi/2n$ ne rencontre aucun des deux segments S_n et S_n^* et même les sépare. Il en résulte que l'un au moins de ces segments n'est pas traversé par une droite parallèle à ce diamètre. Par des rotations d'angle $\pi/2n$ on complète le raisonnement.

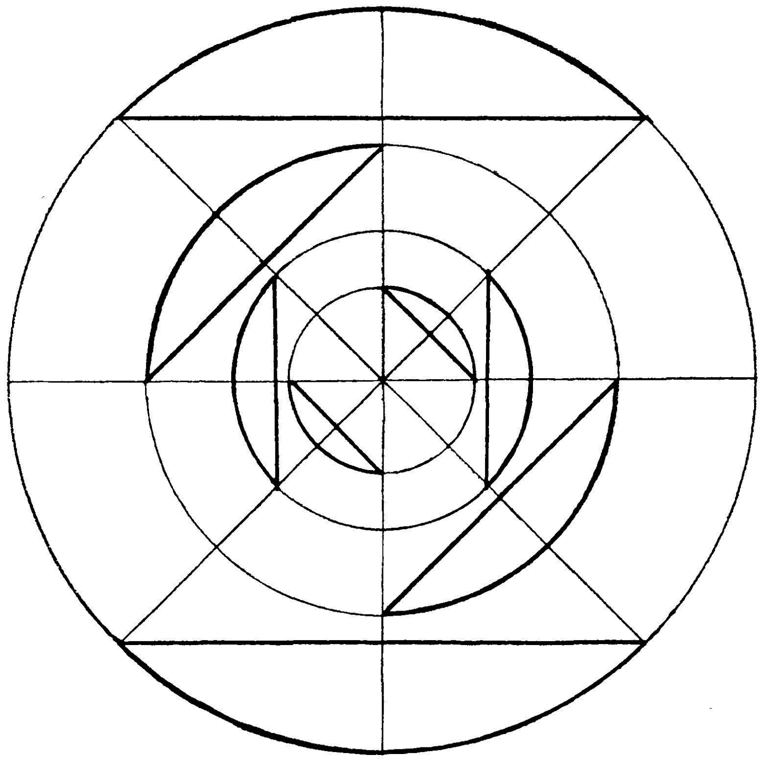

Fig. 5

C. (Quels que soient les R_i) il n'existe aucun point commun aux $4n$ segments. C'est une conséquence évidente de B.

D. Si tous les R_i sont égaux à R, pour chaque combinaison de $2n - 1$ couples de segments, il existe au moins un couple de points diamétralement opposés qui leur soit commun. Il suffit de considérer tous les couples de segments sauf S_n et S_n^*. Les deux points d'angle polaire 0 et π leurs sont communs. Les rotations d'angle multiples de $\pi/2n$, qui échangent les segments, montrent qu'il en est de même pour chaque combinaison de $2n - 1$ couples.

E. Si tous les R_i sont égaux à R, il n'existe aucun couple de points diamétralement opposés appartenant aux $2n$ couples de segments. C'est une conséquence évidente de B.

F. De D on déduit que toute combinaison de $2n - 1$ couples de segments est traversée par un diamètre. Mais cette propriété reste vraie même si les rayons ne sont plus égaux et, en particulier, lorsque les segments pris, deux à deux, n'ont pas de point commun (comme dans la propriété A).

G. Si tous les R_i sont égaux à R, pour chaque combinaison de $2n - 1$ segments, il existe deux points tels que chacun de ces segments contienne au moins l'un des deux points. C'est une conséquence de D.

H. On ne peut pas trouver de couple de points tel que chacun des $4n$ segments contienne au moins l'un des points de ce couple. C'est une conséquence évidente de B.

Les propriétés A, B et F fournissent une réponse négative à la question posée ci-dessus. La même rosace permet de montrer l'impossibilité de diverses propriétés analogue à celle de Helly.

A l'occasion d'un travail de L. A. Santaló [51], Th. Motzkin a donné un contre-exemple de l'énoncé suivant: pour que tous les couples d'un ensemble de couples d'ovales aient au moins un point commun, il suffirait qu'il en soit ainsi pour chaque combinaison d'un certain nombre h de ces couples. C'est également ce que montre l'exemple de la rosace; propriétés D et E (dans le cas de rayons égaux).

V. L. Klee jr. [31] a cherché à trouver un nombre h de Helly vérifiant l'énoncé suivant: Pour que chacun des ovales d'un ensemble contienne au moins l'un des deux points d'un couple il suffirait qu'il en soit ainsi pour chaque combinaison de h de ces ovales. L'exemple de la rosace montre encore qu'il n'en existe pas. Il suffit de considérer les propriétés G et H.

On ne sait pas encore s'il existe un nombre h de Helly dans le cas d'un ensemble d'ovales « congruents » (ou déduits de l'un d'eux par translation), deux à deux sans point commun, et dont on cherche s'ils ont une sécante commune, s'il en est ainsi pour chaque combinaison de h de ces ovales. On peut d'abord se poser la question pour des cercles; l'existence de h apparaît alors plausible, mais on n'en a pas de preuve. Il faudrait en tout cas, que h soit au moins égal à 5 ainsi que le montre la figure 6.

En revanche, on a pu établir le théorème suivant pour des ensembles d'ovales homothétiques:

26. *Pour que, relativement à un ensemble d'ovales homothétiques, il existe un système de quatre droites formant un rectangle, telles que chaque ovale soit traversé par au moins l'une d'entre elles, il suffit que, pour chaque combinaison de quatre ovales de l'ensemble, il existe (au moins) une sécante commune.*

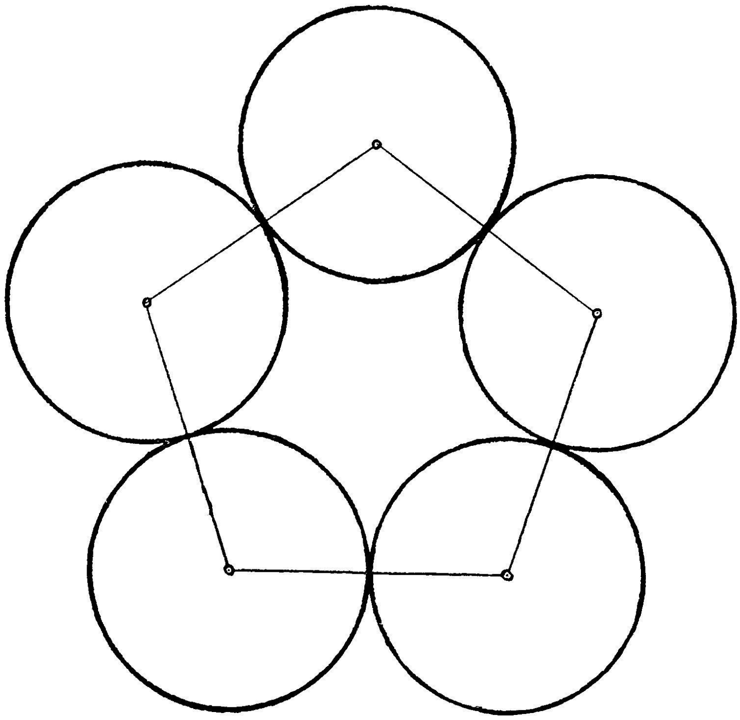

FIG. 6

Nous terminerons ce groupe de théorèmes en indiquant un énoncé du type de Helly, découvert par P. VINCENSINI [59]. On dira qu'un ensemble d'ovales est « totalement séparable » lorsqu'il existe une direction de droite, telle que toute droite parallèle à cette direction ne traverse au plus qu'un seul ovale de l'ensemble. On peut alors tracer, dans le plan, des bandes à bords parallèles à cette direction, deux à deux sans point commun, et telles que chaque bande contienne un et un seul ovale (comme l'indique la figure 7).

27. *Pour qu'il existe une droite traversant tous les ovales d'un ensemble totalement séparable, il suffit qu'il en soit ainsi pour chaque combinaison de trois ovales de l'ensemble.*

La propriété avait été établie par P. Vincensini pour des combinaisons de $h = 4$ ovales. V. L. Klee jr. [34] a montré qu'elle était vraie pour h seulement égal à trois. Cette propriété a pour cas particulier le théorème suivant énoncé par L. A. Santaló [50] (Voir aussi H. Rademacher-I. J. Schœnberg [44]):

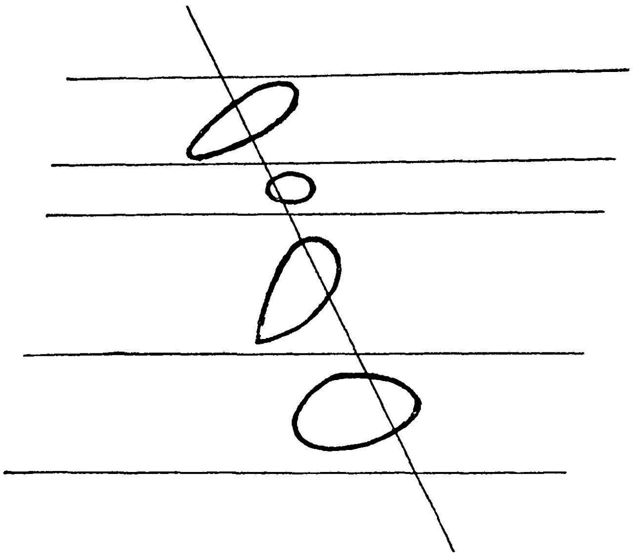

Fig. 7

Pour qu'il existe une sécante commune à un ensemble de segments de droites, strictement parallèles entre eux (donc totalement séparables) il suffit que la propriété soit vraie pour chaque combinaison de trois segments de l'ensemble.

Au sujet du théorème **27**, on peut modifier la condition de la séparation totale pour des ovales suffisamment clairsemés, ce qui peut être exprimé par les grandeurs des angles apparents comme l'indiquent la figure 8 et le théorème suivant.

28. *Pour qu'un ensemble d'ovales soit totalement séparable, il suffit que de tout point du plan on ne puisse voir plus d'un ovale sous un angle apparent au moins égal à $\pi/3$ et que, pour chaque combinaison de quatre ovales de l'ensemble, il existe (au moins) une sécante commune.*

* * *

On termine par quelques énoncés, plus ou moins apparentés au théorème connu de H. W. Jung [26] sur la grandeur de l'enveloppe circulaire d'un ensemble de points de diamètre donné. Précisons d'abord quelques notions:

Un ensemble de points est « borné » s'il peut être recouvert par un cercle fermé.

En vue des théorèmes suivants nous dirons qu'un ensemble de droites est « borné » lorsqu'il ne contient pas de couple de droites parallèles, et que les points d'intersection de tous les couples de droites forment un ensemble borné.

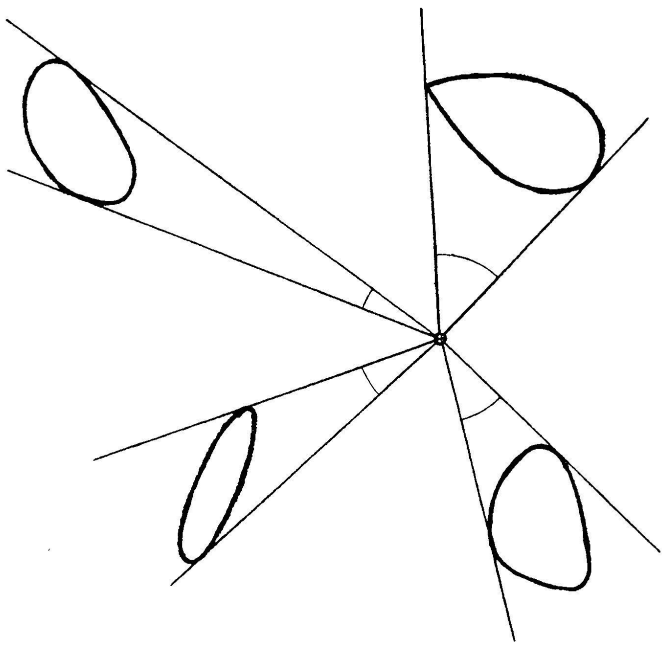

Fig. 8

Le « rayon de recouvrement » d'un ensemble borné de points est le rayon du plus petit cercle (fermé) qui contient tous les points de l'ensemble. Par analogie on appellera « rayon d'intersection » d'un ensemble borné de droites, le rayon du plus petit cercle (fermé) coupé par toutes les droites de l'ensemble.

Le « diamètre » d'un ensemble borné de points est la limite supérieure des distances de ses couples de points. Par analogie, on appellera diamètre d'un ensemble borné de droites, le diamètre de l'ensemble des points d'intersection.

29. *Pour qu'il existe un cercle de rayon R recouvrant tous les points d'un ensemble borné il suffit que, pour chaque combinaison de trois de ces points, il existe au moins un cercle de rayon R la recouvrant.*

30. *Pour qu'il existe un cercle de rayon R rencontrant toutes les droites d'un ensemble borné, il suffit que, pour toute combinaison de trois de ces droites, il existe au moins un cercle de rayon R les rencontrant.*

Ce sont des conséquences du théorème **21**.

31. *Le rayon de recouvrement d'un ensemble borné de points dont le diamètre est égal à 1, est au plus égal à $1:\sqrt{3}$.*

C'est un cas particulier, pour le plan, du théorème de Jung. H. Rademacher et O. Tœplitz [45] en donnent un exposé détaillé.

32. *Le rayon d'intersection d'un ensemble borné de droites dont le diamètre est égal à 1, est au plus égal à $1/2\sqrt{3}$.*

C'est la transformation par dualité du théorème de Jung.

33. *Tout ensemble borné de points dont le diamètre est égal à 1, peut être recouvert par un triangle équilatéral de côté $\sqrt{3}$.*

34. *Tout ensemble borné de points dont le diamètre est égal à 1, peut être recouvert par un hexagone de côté $1:\sqrt{3}$.*

Un domaine qui peut recouvrir tout ensemble de points dont le diamètre est égal à 1, est appellé « couvercle » (normal). Le cercle de rayon $1/\sqrt{3}$ est le couvercle de Jung. Le triangle équilatéral et l'hexagone circonscrits au cercle de diamètre égal à 1 sont des couvercles. L'énoncé **33** est un cas particulier pour le plan, d'un théorème établi par D. Gale [15], correspondant au théorème de Jung. Le théorème **34** est dû à S. Pál [42].

35. *Tout ensemble borné de points dont le diamètre est égal à 1, peut être recouvert par trois ensembles de points dont les diamètres ne dépassent pas $\sqrt{3}/2$.*

C'est une forme plus précise, donnée par D. Gale [15] d'un théorème dû à K. Borsuk [5] qui exprime que, dans le plan, tout ensemble de points peut être considéré comme la réunion de trois sous-ensembles de diamètres inférieurs. K. Borsuk avait suggéré qu'un ensemble de points, dans un espace de k dimensions pourrait être décomposé en $k+1$ sous-ensembles de diamètres inférieurs. Cette propriété a été établie pour $k=3$ par

H. G. EGGLESTON [10]; elle n'a pas encore été démontrée pour $k > 3$.

Le théorème ci-dessus de K. BORSUK, non compris la précision de D. GALE, est aussi une conséquence, dans le cas d'un ensemble d'un nombre fini de points du plan, du théorème suivant sur le nombre de couples de points dont la distance est égale au diamètre de l'ensemble.

36. *Dans un ensemble, d'un nombre fini n de points, dont le diamètre est égal à 1, il y a au plus n couples distincts de points dont la distance est égale à 1.*

On en trouve une brève démonstration dans P. ERDÖS [13] — Cf. aussi H. HOPF et E. PANNWITZ [23].

Les relations étroites entre tous ces groupes de théorèmes sont mises en évidence par la conséquence suivante du théorème **34** énoncée sous une forme analogue à celle du théorème de Helly.

37. *Pour que, dans un ensemble de cercles de rayon égal à 1, on puisse construire un triangle équilatéral de côté égal à 1, dont chaque cercle de l'ensemble contienne au moins l'un des sommets, il suffit que chaque couple de cercles de l'ensemble ait au moins un point commun.*

On trouve dans L. FEJES-TÓTH [14] — page 97 — des énoncés analogues qui ne sont encore que partiellement démontrés.

2me PARTIE

Nous donnons ci-dessous de courtes démonstrations des théorèmes qui précèdent, d'après les sources indiquées. Nous nous bornons souvent à la suite des idées. Les raisonnements ne supposent que des propositions préalables élémentaires notamment des considérations simples sur les ensembles de points.

1. On raisonne par l'absurde: on considère des points P_i vérifiant les conditions de l'hypothèse et non alignés. On peut, en effectuant éventuellement une transformation projective supposer l'un d'eux P_1 à l'infini. Les droites joignant tous les