

SUR UNE CONSTRUCTION DU POLYGONE RÉGULIER DE 17 COTÉS, DUE A ANDRÉ-MARIE AMPÈRE, D'APRÈS DES DOCUMENTS CONSERVÉS DANS LES ARCHIVES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

Autor(en): **Lebesgue, Henri**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-33735>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR UNE CONSTRUCTION DU POLYGONE RÉGULIER
DE 17 COTÉS, DUE A ANDRÉ-MARIE AMPÈRE, D'APRÈS
DES DOCUMENTS CONSERVÉS DANS LES ARCHIVES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PAR

Henri LEBESGUE

Peu après que notre confrère M. de Launay nous eut fait connaître le premier travail mathématique d'Ampère, Paul Janet me dit son intention d'entretenir l'Académie des dernières recherches mathématiques d'Ampère et il me demanda d'examiner quelque jour avec lui des documents réunis par M. M. Mathieu, l'actif secrétaire de la Société des amis d'A.-M. Ampère. J'ai fait cet examen, seul hélas ! Voici ce que j'ai vu.

Le 14 septembre 1835, Ampère fit une communication à l'Académie que le tome 1 des *Comptes rendus* résume en quelques lignes, d'ailleurs rédigées par Ampère; on en possède le manuscrit: « M. Ampère dépose sur le bureau une figure géométrique dans laquelle la construction très simple qu'il a trouvée pour diviser la circonférence de cercle en 17 parties égales est représentée. » Et Ampère continue en annonçant qu'il donnera une théorie élémentaire de la division du cercle. En réalité Ampère, qui mourut à Marseille le 10 juin 1836 en tournée d'inspection, intervint encore à l'Académie, mais n'y fit plus de communication personnelle.

Les papiers d'Ampère contiennent des brouillons de calculs sur le polygone de 17 côtés, parfois sur celui de 257 côtés, le début de la rédaction de la communication projetée et des figures. La principale est reproduite ici (fig. 1), j'ai corrigé un lapsus de la légende: OA au lieu de CA. La construction d'Ampère suit, pas à pas, la marche indiquée par Gauss pour la

résolution des équations binômes, laquelle fournit les valeurs, différentes de 1, des quantités

$$k = \cos \frac{2k\pi}{17},$$

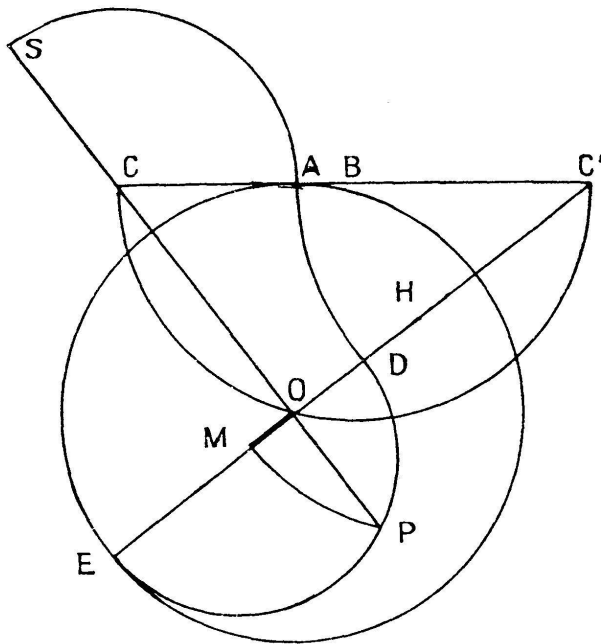
par les calculs suivants:

$$(I) \quad 2x^2 + x - 2 = 0 \\ \text{donne } x_1 = (1) + (2) + (4) + (8) < (3) + (5) + (6) + (7) = x_2,$$

$$(II) \quad y^2 - x_1 y - 1 = 0 \\ \text{donne } y_1 = 2[(1) + (4)] < 2[(2) + (8)] = y_2,$$

$$(II') \quad z^2 - x_2 y - 1 = 0 \\ \text{donne } z_1 = 2[(3) + (5)] < 2[(6) + (7)] = z_2,$$

$$(III) \quad t^2 - y_1 t + z_1 = 0 \\ \text{donne } t_1 = 2(1) < 2(4) = t_2.$$



$$AB = \frac{OA}{4}, \quad PH = \frac{OS}{2}, \quad OM = \text{corde } \frac{\pi}{17}.$$

FIG. 1.

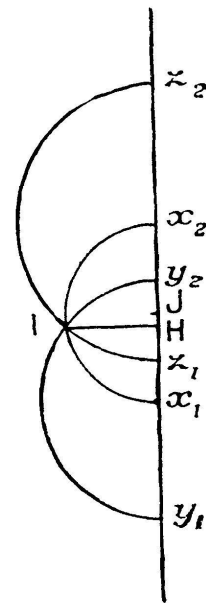


FIG. 2.

Prenant $OA = 1$, Ampère obtient les racines $x_1 = AC$, $x_2 = -AC'$ par la méthode classique; il construit y_1 et y_2 à l'aide de leurs expressions irrationnelles

$$y_1 = x_1 + \sqrt{1 + x_1^2} = AC + OC = OS,$$

$$z_1 = x_2 + \sqrt{1 + x_2^2} = -AC' + OC' = OD;$$

enfin il construit les racines de (III) par la méthode classique, d'où

$$OM = t_2 = 2(4) = 2 \cos \frac{16\pi}{34} = 2 \sin \frac{\pi}{17} = \text{corde de } \frac{\pi}{17}.$$

Ampère a donc suivi Gauss, dont d'ailleurs il possédait les *Disquisitiones* dans sa bibliothèque (catalogue de 1816); dans ses brouillons, il emploie même des notations de Gauss. Or la méthode de Gauss peut être dirigée vers le calcul d'un (k) quelconque, d'où des figures d'Ampère, variantes de la figure 1, donnant la corde de $3\pi/17$ ou celle de $5\pi/17$. Mais on trouve aussi une figure énigmatique formée uniquement de circonférences ayant deux points communs; une seule indication: « 2^{q-4} en dénominateur ». Mais notons que les centres, sauf un, sont sur des circonférences tracées et le mystère deviendra facile à percer.

Quand on essaie, comme Ampère, de réaliser le tracé dont Gauss s'était contenté de constater la possibilité, on peut être conduit à modifier les équations. Ainsi l'équation (I) d'Ampère n'est pas tout à fait celle de Gauss, pour laquelle les racines sont $2x_1$ et $2x_2$; de ce changement insignifiant résulte la possibilité de construire y_1 et z_1 comme l'indique la figure 2, dans laquelle $HI = 4HJ = 1$ et où les cercles tracés ont pour centres J, x_1, x_2 . Il suffirait de remarquer que Iy_1 et Iy_2 , par exemple, sont les bissectrices de Hix_2 pour être amené à constater que les angles HIy et HIz sont les solutions de l'équation $\text{Arctg } 4X = 4$ et l'on serait ainsi conduit à la plus élégante des constructions du polygone de 17 côtés actuellement connues, celle due à M. W. Richmond. On peut penser qu'une construction analogue aurait été trouvée quelque cinquante ans plus tôt si Ampère avait publié ses essais; car, si Ampère n'a certes pas trouvé cette construction, il a du moins tracé la figure 2 relative au polygone de 17 côtés dans un brouillon. Ceci, à côté de calculs sur le polygone de n côtés; or, si l'on essaie d'étendre à ce cas la méthode considérée, on constate que, lorsqu'on y peut réussir, on y parvient en divisant par les puissances successives de 2 les racines des équations successives de Gauss, d'où l'indication signalée ci-dessus, et la construction débute par le tracé de la figure mystérieuse. Les valeurs de n pour lesquelles la méthode

s'applique sont rares; elle ne s'applique pas à $n = 257$; c'est peut-être cela qui a arrêté Ampère.

Quant à la méthode élémentaire d'Ampère, elle consiste essentiellement en la vérification des résultats de Gauss par le calcul des sommes et produits, tels que $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$, grâce aux formules de la trigonométrie. Pourtant, dans la rédaction commencée de sa communication future, il va plus loin; il abandonne le langage trigonométrique, il ne parle plus que de cordes et traduit les formules en théorèmes auxiliaires sur les cordes, tels le théorème de Ptolémée. Cette prétendue simplification engendre des longueurs et des lourdeurs; quel était donc le but d'Ampère? Car il ne s'agit évidemment plus pour lui de retrouver à sa façon, pour le mieux comprendre, le résultat de Gauss.

C'est un problème difficile et toujours ouvert de savoir comment aider les professeurs scientifiques de l'enseignement moyen à trouver dans la science qu'ils ont étudiée, et dont ils enseignent les rudiments, un aliment pour leurs pensées. Comment obtenir que leur vie intellectuelle ne se sépare pas de leur métier, ne s'oppose pas à lui, qu'alors ils accomplissent leur tâche avec plus de joie et de fierté et, partant, plus d'efficacité? L'inspecteur général Ampère, qu'une telle question ne pouvait laisser indifférent, stimulait volontiers l'activité intellectuelle de ses administrés en leur parlant de philosophie ou de classification des sciences. Mais peu de questions proprement scientifiques pouvaient être abordées; la division du cercle lui offrait une occasion rare, il en parla dans ses inspections, deux lettres à lui adressées le prouvent, et c'est évidemment en pensant aux professeurs de l'enseignement moyen qu'il bâtissait son exposé élémentaire.

Sur ces préoccupations si humaines, notre regretté confrère Paul Janet, qui était en quelque sorte un familier d'Ampère, aurait eu certainement des choses touchantes à nous dire. Mes brèves indications rappelleront du moins combien le grand savant, que les étudiants de ma génération appelaient irrévérencieusement le bonhomme Ampère, fut un homme bon.