

problème de la division des polynomes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Dans le cas général :

$\deg(A + B) \leq \max(\deg A, \deg B)$, c'est-à-dire est inférieur ou égal au plus grand des entiers $\deg A$, $\deg B$.

2° Si $AB \neq 0$, $\deg AB = \deg A + \deg B$.

Définition. — Soit $A = (a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$ un polynôme. Nous appellerons *valuation de A* et nous la désignerons par $\nu(A)$, le plus petit entier $m \geq 0$ tel que $a_m \neq 0$.

Cela entraîne que si $m \geq 1$ on a $a_k = 0$ pour $0 \leq k \leq m-1$. La valuation de 0 n'est pas définie.

On remarquera que quel que soit A : $\nu(A) \leq \deg A$.

La valuation et les deux lois algébriques.

D'après la définition, on a les propriétés suivantes :

1° Si $\nu(A) > \nu(B)$, alors $\nu(A + B) = \nu(B)$.

Si $\nu(A) = \nu(B) = m$ et si $a_m + b_m \neq 0$,
alors $\nu(A + B) = \nu(A) = \nu(B)$.

Dans le cas général : $\nu(A + B) \geq \min(\nu(A), \nu(B))$, c'est-à-dire supérieure ou égale au plus petit des entiers $\nu(A)$, $\nu(B)$.

2° Si $AB \neq 0$, alors $\nu(AB) = \nu(A) + \nu(B)$.

Remarque. — Une condition *nécessaire* (seulement) pour que $A = B$ est que $\deg A = \deg B$ et $\nu(A) = \nu(B)$. La négation de cette proposition signifie que si l'une des conditions $\deg A = \deg B$ ou $\nu(A) = \nu(B)$ n'est pas réalisée, alors $A \neq B$.

LE PROBLÈME DE LA DIVISION DES POLYNOMES

L'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes est un anneau commutatif unitaire, mais n'est pas un corps, c'est-à-dire que la division n'est pas en général possible, c'est-à-dire encore, que deux polynômes A et B étant donnés il n'existe pas en général de polynômes X tel que $A = BX$.

Définition. — On dit que A est divisible par $B \neq 0$, s'il existe Q tel que $A = BQ$. On dit aussi que A est multiple de B ou que B divise A ou est diviseur de A. Alors A est aussi multiple de Q.

Si Q existe, il est unique car s'il existait encore Q' tel que $A = BQ'$ on aurait $BQ = BQ'$ et comme $B \neq 0$, $Q = Q'$.

On peut alors présenter cette définition de la façon suivante:

Soit A et $B \neq 0$ deux polynômes; considérons tous les polynômes $A - BX$ où X parcourt $\mathcal{R}$ (c'est-à-dire où X est un polynôme quelconque); dire que A est divisible par B c'est dire qu'il existe $Q \in \mathcal{R}$ tel que $A - BQ = 0$; Q est alors unique.

Lorsque A n'est pas divisible par B , il est alors naturel d'étudier les polynômes $A - BX$ où X parcourt $\mathcal{R}$ et de tenter de trouver X de façon que $A - BX$ possède quelque propriété vraie lorsque $A = BQ$. Or si $A = BQ$, *nécessairement* $\deg A = \deg BQ$ et $\nu(A) = \nu(BQ)$; si $A \neq 0$ ($A = 0$ n'offre pas d'intérêt) on *doit* avoir $\deg A = \deg B + \deg Q$ et $\nu(A) = \nu(B) + \nu(Q)$.

On peut être tenté de chercher pour deux polynômes A et B , un polynôme X tel que simultanément $\deg A = \deg B + \deg X$ et $\nu(A) = \nu(B) + \nu(X)$. Il est facile de voir par un exemple que c'est en général impossible.

On peut alors chercher à sauvegarder l'une des deux propriétés précédentes pour *tout* couple A, B ; en d'autres termes la propriété cherchée doit être vraie *quels que soient* les polynômes A et B . Mais si alors on cherche X en lui imposant la seule condition $\deg A = \deg B + \deg X$, on peut satisfaire à cette condition d'une infinité de manières; nous sommes donc amenés à chercher parmi tous les X possibles, ceux qui possèdent une autre propriété. Cette discussion motive le point de vue qui suit.

Considérons une famille quelconque de polynômes non nuls. Comme les degrés sont des entiers ≥ 0 , il existe dans cette famille, au moins un polynôme dont le degré est inférieur ou égal à tous les degrés des polynômes de cette famille. Considérons alors la famille de tous les polynômes $A - BX$ où $X \in \mathcal{R}$. Si à cette famille on applique la remarque qui vient d'être faite on en conclut qu'il existe au moins un polynôme Q tel que $\deg(A - BQ) \leq \deg(A - BX)$ quel que soit $X \in \mathcal{R}$. Nous verrons alors que nécessairement $\deg(A - BQ) < \deg B$ et que pour tout couple A, B , le polynôme Q tel que $\deg(A - BQ) < \deg B$ est unique. Ce sera *la division euclidienne de A par B ou division suivant les puissances décroissantes*.

L'idée de la division suivant les puissances croissantes sera

déduite de la précédente division, puis nous montrerons que les deux divisions peuvent être ramenées l'une à l'autre.

LA DIVISION EUCLIDIENNE

Soit A et B deux polynômes. Soit $B \neq 0$. Si $A = 0$, on a $A = B \cdot 0$ donc A est divisible par B . Supposons $A \neq 0$ et parmi tous les polynômes $A - BX$ soit $A - BQ$ tel que $\deg(A - BQ) \leq \deg(A - BX)$ quel que soit X , lorsque A n'est pas divisible par B .

Montrons que 1°: $\deg(A - BQ) < \deg B$; 2° Q est unique.

1° Soit en effet:

$$B = b_0 e_0 + \dots + b_p e_p \quad (b_p \neq 0)$$

$$A - BQ = c_0 e_0 + \dots + c_p e_p + \dots + c_m e_m$$

et supposons $m > p$ et $c_m \neq 0$, m étant le plus petit degré possible de tous les polynômes $A - BX$.

On a alors:

$$e_{m-p} B = b_0 e_{m-p} + \dots + b_p e_m$$

$$\frac{c_m}{b_p} e_{m-p} B = \frac{b_0 c_m}{b_p} e_{m-p} + \dots + \frac{c_m}{b_p} b_{p-1} e_{m-1} + c_m e_m.$$

D'où

$$A - BQ - \frac{c_m}{b_p} e_{m-p} B = A - B \left(Q + \frac{c_m}{b_p} e_{m-p} \right) =$$

$$= c_0 e_0 + \dots + \left(c_{m-1} - \frac{c_m}{b_p} b_{p-1} \right) e_{m-1}.$$

Q' désignant le polynôme $Q + \frac{c_m}{b_p} e_{m-p}$, $A - BQ'$ serait de degré $< m$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur m . L'hypothèse $m \geq p$ est donc incompatible avec " m est le plus petit degré possible de tous les $A - BX$ ". On a donc $m < p$, c'est-à-dire $\deg(A - BQ) < \deg B$.

2° Si existait $Q' \neq Q$ tel que $\deg(A - BQ') \leq \deg(A - BX)$ quel que soit X , on aurait $\deg(A - BQ') < \deg B$ d'après ce qui précède. Donc

$$\deg(A - BQ - (A - BQ')) = \deg B (Q' - Q) < \deg B.$$