Lois algébriques sur l'ensemble des polynomes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Egalité de deux polynômes

Deux polynômes $A = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$ et $B = (b_0, b_1, ..., b_m, 0, ...)$ seront dits égaux si quel que soit k: $a_k = b_k$, $(k \geqslant 0)$. Cette définition entraîne qu'à partir du même rang a_k et b_k sont nuls.

On écrira $A = B$, le symbole $=$ pouvant alors être employé de nouveau.

Lois algébriques sur l'ensemble des polynomes

Lois internes

Les conventions suivantes construisent des polynômes à partir de polynômes; elles définissent ce qu'on appelle des *lois internes*. Ce seront l'*addition* et la *multiplication*. Leur définition entraîne des propriétés qui feront de l'ensemble des polynômes muni de ces deux lois, un *anneau commutatif unitaire*.

1° *Addition.*

Soit $A = (a_0, a_1, ...)$, $B = (b_0, b_1, ...)$, deux polynômes. Par définition le polynôme $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_k + b_k, ...)$ est appelé *somme* de A et B et on écrit:

$$A + B = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_k + b_k, ...) .$$

Les propriétés des nombres complexes montrent que cette addition est *associative*, c'est-à-dire que $(A + B) + C = A + (B + C)$ et *commutative*, c'est-à-dire que $A + B = B + A$, quels que soient A, B, C.

Désignons par Θ le polynôme dont tous les coefficients sont nuls: $a_k = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ...$ On a alors quel que soit le polynôme A:

$$A + \Theta = \Theta + A = A$$

Θ est donc l'*élément neutre* pour l'addition.

Désignons par $(- A)$ le polynôme $(- a_0, - a_1, ..., - a_k, ...)$. On a alors: $A + (- A) = \Theta$. Donc tout polynôme A a un *symétrique* $(- A)$ pour l'addition.

Ces propriétés de l'addition signifient que l'ensemble des polynômes muni de l'addition est un *groupe commutatif* ou *groupe abélien.*

2° *Multiplication.*

Soit A $= (a_0, a_1, \ldots)$, B $= (b_0, b_1, \ldots)$ deux polynômes. Par définition le polynôme $(a_0\, b_0, a_0\, b_1 + a_1\, b_0, \ldots, a_0\, b_k + a_1\, b_{k-1} + a_2\, b_{k-2} + \ldots + a_k\, b_0, \ldots)$ est appelé produit de A par B et on écrit:

$$\mathrm{AB} = (a_0\, b_0, a_0\, b_1 + a_1\, b_0, \ldots) .$$

Cette multiplication est évidemment *associative* et *commutative*, c'est-à-dire que quels que soient A, B, C: (AB) C $=$ A (BC) et AB $=$ BA.

Désignons par I le polynôme dont tous les coefficients sont nuls sauf le premier a_0 qui vaut 1 :I $= (1, 0, 0, \ldots)$. On a quel que soit A:

$$\mathrm{IA} = \mathrm{AI} .$$

I est donc l'*élément neutre* pour la multiplication.

En général A n'a pas de symétrique pour la multiplication. Car s'il existe B, tel que AB $=$ I, on doit avoir $a_0\, b_0 = 1$ ce qui exige $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

3° *Propriété de la multiplication par rapport à l'addition.*

De la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans le corps des nombres complexes résulte que quels que soient les polynômes A, B, C:

$$\mathrm{A}\,(\mathrm{B} + \mathrm{C}) = (\mathrm{B} + \mathrm{C})\,\mathrm{A} = \mathrm{AB} + \mathrm{AC} .$$

La multiplication des polynômes est donc *distributive* (doublement) par rapport à l'addition.

4° *L'anneau des polynômes.*

Les propriétés de l'addition jointes à l'associativité et la distributivité (par rapport à l'addition) de la multiplication font de l'ensemble des polynômes un *anneau.*

Si on y ajoute la *commutativité* de la multiplication, cet ensemble prend le nom d'*anneau commutatif.*

Si on y ajoute encore l'existence de l'élément neutre I, cet ensemble prend le nom d'*anneau commutatif unitaire.*

II. *Loi externe*

On peut définir une opération qui construira un polynôme à partir de deux êtres qui seront l'un un polynôme, l'autre un nombre du corps des complexes. A tout polynôme A et tout nombre α, on fait correspondre le polynôme $(\alpha a_0, \alpha a_1, \ldots, \alpha a_k, \ldots)$ qu'on désigne par α A et qu'on appelle *produit de A par* α.

Les propriétés suivantes, vraies quels que soient les polynômes A, B, C et les nombres α, β, ... découlent immédiatement des définitions et propriétés qui précèdent:

1) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
2) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$
3) $1 . A = A$
4) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
5) $\alpha(AB) = (\alpha A) B = A(\alpha B)$.

De ces propriétés, résulte que quel que soit A, $OA = \Theta$. Désormais nous remplaçons Θ par O. D'autre part comme $1.A = A$ et $I.A = A$, nous remplacerons I par 1 et de façon générale, le polynôme $(a_0, 0, 0, \ldots)$ pouvant être considéré comme le produit de $(1, 0, 0, \ldots)$ par a_0 nous identifions le polynôme $(a_0, 0, 0, \ldots)$ où $a_k = 0$ si $k \geqslant 1$ et le nombre a_0. Un tel polynôme s'appelle parfois une constante.

Enfin (— A), symétrique de A pour l'addition, est aussi le polynôme (— 1) A obtenu en multipliant A par (— 1). Nous ne les distinguerons donc pas.

III. *Espace vectoriel*

Si on considère l'ensemble des polynômes muni de l'addition et de la précédente loi externe, les propriétés de l'addition et les quatre premières propriétés de la loi externe font de cet ensemble un *espace vectoriel sur le corps des nombres complexes.* Mais comme on le verra ci-dessous cet espace n'est pas de dimension finie.