Théorème de monodromie.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Démonstration. — Soit $I = [\alpha, \beta[$ ou $[\alpha, \beta]$ l'intervalle sur lequel est définie la courbe $z(t)$ de C; on suppose que $z(\alpha) = z_0$. Soient f_1 et f_2 deux applications continues de I dans $\mathcal{A}$ telles que $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = g_0$, et soit T l'ensemble des points $t \in I$ tels que $f_1(t) = f_2(t)$. Cet ensemble T est fermé relativement à I. D'autre part, si $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$, T est ouvert puisque l'application φ est localement une homéomorphie. Donc T est ouvert et fermé relativement à I; comme T n'est pas vide ($\alpha \in T$) et comme I est connexe, on a $I = T$. Autrement dit, $f_1 = f_2$.

Corollaire. — Soit γ une courbe paramétrée de C et d'origine z_0, définie par $z = z(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$.

Si γ n'est pas le support d'une courbe de $\mathcal{A}$ d'origine g_0, il existe un point τ de $[\alpha, \beta]$ tel que la courbe $z = z(t)$ $(t \in [\alpha, \tau])$ soit le support d'une courbe de $\mathcal{A}$ d'origine g_0, mais qu'il n'en soit pas de même de la courbe $z = z(t)$ $(t \in [\alpha, \tau])$.

Lorsqu'il en est ainsi, on dit que le champ analytique $\mathcal{A}$ est prolongeable à partir de g_0 sur γ jusqu'au point $(\tau, z(\tau))$ exclus, mais pas au-delà. On dit parfois aussi que g_0 et la courbe $z = z(t)$ $(t \in [\alpha, \tau[)$ définissent un *point singulier* du champ $\mathcal{A}$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, si $\rho(g)$ désigne le rayon de la rondelle maximale de centre g, $\rho(g(t)) \to 0$ lorsque $t \to \tau$ (où $g(t)$ est le point de $\mathcal{A}$ associé à $z(t)$).

Théorème de monodromie.

On va énoncer ce théorème classique sous une forme en apparence moins générale, afin d'éviter le recours à la notion d'homotopie. L'énoncé général se déduirait du nôtre assez aisément, en utilisant des propriétés simples de l'homotopie.

Théorème 4: Soit $\mathcal{A}$ un champ analytique; soit ω un ouvert de C homéomorphe à un disque ouvert plan, et soit g_0 un point de $\mathcal{A}$ de support $z_0 \in \omega$.

Si toute courbe paramétrée $z(t)$ $(t \in I)$ de ω et d'origine z_0 est le support d'une courbe $f(t)$ $(t \in I)$ de $\mathcal{A}$ et d'origine g_0, la réunion Ω des images $f(I)$ de ces courbes est un ouvert de $\mathcal{A}$ qui recouvre ω une seule fois.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant, de nature purement topologique:

Lemme: Soit E un espace topologique quelconque et soit φ une application de E dans un espace séparé F. Soit K un compact de E. Si φ est continue en tout point de K, si la restriction de φ à K est biunivoque, et si φ est biunivoque au voisinage de tout point de K, φ est biunivoque au voisinage de K. [1]

Démonstration. — Soit ψ l'application (φ, φ) de E^2 dans F^2. Désignons par δ_E et δ_F les diagonales de E^2 et F^2. Les hypothèses se traduisent de la façon suivante:

(1) F séparé $\Longleftrightarrow$ δ_F est fermé dans F^2;

(2) K compact $\Longleftrightarrow$ K^2 compact;

(3) φ continue en tout point de K $\Longleftrightarrow$ ψ continue en tout point de K^2;

(4) restriction de φ à K biunivoque $\Longleftrightarrow$ $\psi(K^2 - \delta_E) \subset \mathbf{C}\,\delta_F$;

(5) biunivocité locale de φ en tout point de K $\Longleftrightarrow$ $\delta_E \cap K^2$ a un voisinage V tel que $\psi(V - \delta_E) \subset \mathbf{C}\,\delta_F$.

Des conclusions (1), (3), (4) résulte que $\psi^{-1}(\mathbf{C}\,\delta_F)$ est un voisinage de $(K^2 - \delta_E)$; en rapprochant ce résultat de (5), on voit que K^2 possède un voisinage W tel qu'en tout point $(x, y) \in W - \delta_E$ on ait $\psi(x, y) \notin \delta_F$.

Or d'après (2), K^2 est compact, donc il existe un voisinage U de K tel que $U^2 \subset W$.

Autrement dit, pour tout couple (x, y) de points distincts de U, on a $(\varphi(x), \varphi(y)) \notin \delta_F$, c'est-à-dire $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Démonstration du théorème 4. — Par hypothèse, on a $\varphi(\Omega) = \omega$.

D'autre part, du fait que la restriction de φ à toute rondelle de $\mathfrak{A}$ est une homéomorphie avec un disque ouvert de C résulte que Ω est un ensemble ouvert.

Il nous reste à montrer que la restriction de φ à Ω est biunivoque (ce sera donc aussi une homéomorphie).

---

[1] On dit qu'une application φ de E est biunivoque au voisinage d'un ensemble A de E si la restriction de φ à un voisinage de A est biunivoque.

Pour simplifier les notations, supposons que ω soit un disque ouvert de centre z_0 et de rayon 1. Le cas général se ramène immédiatement à celui-ci par homéomorphie.

Pour tout point z de ω distinct de z_0, le segment (z_0, z) définit la courbe γ : $\zeta = z_0 + t(z - z_0)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$; celle-ci est d'après l'hypothèse la projection d'un arc de $\mathcal{A}$ d'équation $f_z(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ avec $f_z(0) = g_0$. Posons $f_z(1) = g(z)$; on a par construction $\varphi(g(z)) = z$.

D'après le théorème 3, la fonction $g(z)$ est bien définie. Nous allons montrer que $g(z)$ est *continue*.

L'ensemble $f_z([0, 1])$ est un compact K de $\mathcal{A}$ tel que la restriction de φ à K soit biunivoque, puisque la courbe γ n'a pas de point double.

D'après le lemme précédent, K possède un voisinage U ouvert tel que la restriction φ_U de φ à U soit biunivoque, donc soit une homéomorphie. L'ensemble $V = \varphi(U)$ est un voisinage du segment (z_0, z); or V contient tout segment (z_0, z') où z' est un point assez voisin de z, donc U contient aussi tous les points $g(z')$ correspondants.

Autrement dit $g = \varphi_U^{-1}$ au voisinage de z; donc g est continue.

A toute courbe paramétrée $z(t)$ de ω et d'origine z_0 correspond la courbe $g(z(t))$ de $g(\omega)$ dont la projection sur C est identique à la courbe $z(t)$.

Donc l'ensemble Ω cherché n'est autre que $g(\omega)$. Par construction, cet ensemble recouvre ω une seule fois; comme g est biunivoque et que $g^{-1} = \varphi_{g(\omega)}$, $g(\omega)$ est un ouvert de $\mathcal{A}$ homéomorphe à ω.

Morceau de champ analytique.

DÉFINITION 9: On appelle *morceau de champ analytique* tout ouvert connexe non vide $\mathfrak{M}$ de l'espace G des germes analytiques.

Il est immédiat qu'un morceau de champ analytique $\mathfrak{M}$ appartient à un champ analytique $\mathcal{A}$ et à un seul, dont il constitue une partie ouverte.

Il est important de savoir reconnaître si un morceau de champ analytique $\mathfrak{M}$ est un champ.

Une condition nécessaire et suffisante pour cela est évidemment que $\mathfrak{M}$ soit fermé dans G. Nous allons traduire cette condition de façon plus commode:

Théorème 5. — Pour qu'un morceau de champ analytique $\mathfrak{M}$ soit un champ, il faut et il suffit que, pour tout point $g \in \mathfrak{M}$, toute rondelle Δ de centre g et de rayon fini soit contenue dans $\mathfrak{M}$.

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons-la réalisée. Soit g un élément de G, limite de germes g_n de $\mathfrak{M}$.

Dès que g_n est assez voisin de g, il existe une rondelle de centre g_n et contenant g; donc on a $g \in$ G. Autrement dit, $\mathfrak{M}$ est fermé dans G; c'est donc bien un champ.

Corollaire 1. — Si un morceau de champ analytique $\mathfrak{M}$ a pour support C et recouvre C une seule fois, $\mathfrak{M}$ est un champ.

En effet, pour tout $g \in \mathfrak{M}$ et tout $\rho > 0$, la rondelle $\Delta(g, \rho)$ est alors contenue dans $\mathfrak{M}$.

On appelle un tel champ un *champ entier* ou plus simplement une fonction entière.

Corollaire 2. — Tout morceau de champ M qui contient un ouvert qui recouvre C une seule fois est identique à cet ouvert et est un champ entier.

Inverse d'un germe et inverse d'un champ.

Soient $v = f(u)$ et $u = g(z)$ deux fonctions holomorphes, l'une g au voisinage d'un point z_0, l'autre f au voisinage du point $u_0 = g(z_0)$. La fonction $h(z) = f(g(z))$ est holomorphe au voisinage de z_0.

Si $f(g(z)) \equiv z$ au voisinage de ce point, on a $f'(u_0)\, g'(z_0) = 1$, donc $f'(u_0)$ et $g'(z_0)$ ne sont pas nuls.

Inversement, si $g(z)$ est une fonction holomorphe au voisinage de z_0, avec $g'(z_0) \neq 0$, on sait qu'il existe une fonction $f(u)$ et une seule holomorphe au voisinage de $u_0 = g(z_0)$, et telle que $f(g(z)) \equiv z$ au voisinage de z_0.

Evidemment $f(u_0) = z_0$; la fonction $g(f(u))$ est donc définie au voisinage de u_0; et on a $g(f(u)) = u$ au voisinage de u_0.

Ces remarques montrent qu'à tout germe $g = (z_0; a_0, a_1, \ldots)$ tel que $a_1 \neq 0$, on peut associer un germe et un seul:

$f = (a_0; z_0, 1/a_1, b_2, \ldots)$ tel que $f \circ g = (z_0; z_0, 1, 0, 0, \ldots)$ [1].

On note $f = g^{-1}$ et on l'appelle *germe inverse* de g. Ce qui précède montre que $(g^{-1})^{-1} = g$.

Désignons par G* l'ensemble des germes inversibles. L'application Φ de G* sur G* définie par $g \to g^{-1}$ est biunivoque et a pour carré l'identité.

C'est en outre une homéomorphie. Pour le voir, il suffit de vérifier que Φ est continue.

Or ceci résulte de ce que, avec les notations du début de ce paragraphe, si $f(u)$ et $g(z)$ sont deux fonctions localement inverses au voisinage de z_0 et u_0, le germe (z, A) où A est la suite $(f(z), \ldots, \frac{f^{(n)}(z)}{n!}, \ldots)$ a pour inverse le germe (u, B) où $u = f(z)$ et où B est la suite $(g(u), \ldots, \frac{g^{(n)}(u)}{n!}, \ldots)$.

Si $\mathcal{A}$ est un champ de G qui ne soit pas une fonction constante, et si on pose $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \cap \mathrm{G}^*$, l'ensemble $(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$ est fermé et discret (donc aussi dénombrable).

L'ensemble $\Phi(\mathcal{A}^*)$ est ouvert et connexe, donc appartient à un champ que l'on notera $\mathcal{B}$.

On a $\Phi(\mathcal{A}^*) \subset \mathcal{B}^*$; mais aussi $\Phi(\mathcal{B}^*) \subset \mathcal{A}^*$ d'où $\mathcal{B}^* \subset \Phi(\mathcal{A}^*)$, donc $\mathcal{B}^* = \Phi(\mathcal{A}^*)$.

Aussi appellerons-nous $\mathcal{B}$ le champ inverse de $\mathcal{A}$ et le noterons-nous $\mathcal{A}^{-1}$.

Nous venons de voir que, mis à part deux sous-ensembles dénombrables fermés et discrets, les champs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^{-1}$ sont homéomorphes dans l'homéomorphie Φ.

Pour éliminer les ensembles dénombrables exceptionnels, il faudrait modifier la définition des germes, en considérant comme germe tout développement (non uniforme) tel que $\left(\sum_0^\infty a_n z^{\frac{n}{p}}\right)$ où p est un entier > 0.

En fait, pour avoir une théorie entièrement satisfaisante, il faudrait aussi remplacer le plan C par le plan $\hat{\mathrm{C}}$ déduit de C

[1] Le germe $f \circ g$ se définit de façon évidente d'après ce qui précède.

par l'addition d'un point à l'infini (ce qu'on appelle aussi la sphère de Riemann).

Exemple. — Soit $\mathfrak{A}$ le champ « entier » défini par la fonction entière e^z. La fonction e^z n'a sa dérivée nulle en aucun point, donc $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$. D'autre part, e^z n'a pas de point critique (non étudié ci-dessus), donc on aura $(\mathfrak{A}^{-1})^* = \mathfrak{A}^{-1}$. On aura donc $\mathfrak{A}^{-1} = \Phi(\mathfrak{A})$.

En particulier $\mathfrak{A}^{-1}$ sera homéomorphe à $\mathfrak{A}$, donc aussi au plan C.

Le champ inverse de celui de e^z s'appelle logarithme et on note la fonction analytique de ce champ: $\log(g)$.

De la propriété $e^{z+i\pi} = e^z$ résulte que l'homéomorphie $g \to g'$ de G sur lui-même définie comme suit:

$$g' = (z; a_0 + 2i\pi, a_1, \ldots) \text{ si } g = (z; a_0, a_1, \ldots)$$

est une automorphie de $\mathfrak{A}^{-1}$.