

IV. Discussion des séries (II, 4) et (II, 5).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

IV. Discussion des séries (II, 4) et (II, 5).

Pour assurer la validité des conditions γ) et δ) on doit faire des hypothèses plus restrictives sur la fonction $\Psi''(x)$. Il résulte en tout cas de la condition α), φ'_+ étant continue par morceaux, que l'intégrale

$$\int_{a_0}^{\infty} \varphi'_+(x) dx \quad (\text{IV, 1})$$

est divergente et que l'intégrale

$$\int_{a_0}^{\infty} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} dx \quad (\text{IV, 2})$$

converge. Or, le critérium de Maclaurin-Cauchy liant la divergence de la série (II, 4) à la divergence de l'intégrale (IV, 1) et la convergence de la série (II, 5) à l'intégrale (IV, 2) n'est pas valable sans restrictions. On suppose généralement que l'expression sous le signe d'intégral ne croît pas pour x tendant vers l'infini. Or, il résulte des relations (III, 5) et (III, 7) que $\varphi'_+(x)$ ne croît pas si

$$1^\circ \quad \psi'(a_1) = \frac{1}{\Psi''(a_0)} \leq 1$$

et

2° la fonction $\psi'(x)$ ne croît pas, c'est-à-dire que $\Psi''(x)$ ne décroît pas.

Il suffit donc d'imposer à la fonction $\Psi'(x)$ les conditions suivantes pour que $\varphi'_+(x)$ ne croisse dans aucun intervalle au-dessus de a_0 :

$$\Psi''(a_0) \geq 1, \quad \Psi''(x) \leq \Psi''(y) \quad (a_0 \leq x \leq y). \quad (\text{IV, 4})$$

On peut d'ailleurs remplacer (IV, 4) par la condition suivante, un peu moins restrictive:

$\Psi''(x)$ ne décroît pas et atteint ou dépasse la valeur un pour une valeur b_0 de x .

En effet, on peut alors remplacer a_0 par b_0 , de sorte que les conditions (IV, 4) deviennent satisfaites.

On peut, d'autre part, établir les propriétés γ) et δ) en imposant une condition tout à fait différente à $\Psi''(x)$, à savoir que $\Psi''(x)$ ne croît pas.

En effet, dans ce cas on a évidemment $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi''(x) = \alpha$ où α ne peut être < 1 , puisque dans le cas contraire la condition (II, 1) ne saurait être constamment satisfaite. Donc on a $\alpha \geq 1$, $\Psi''(x) \geq 1$. On peut supposer $\Psi''(a_0) > 1$, puisque pour $\Psi''(a_0) = 1$ on aurait $\Psi''(x) \equiv 1$, c'est-à-dire un des cas où les conditions (IV, 4) sont satisfaites. On a alors

$$\frac{d}{dx}(\Psi(x) - x) \geq \alpha - 1 \geq 0,$$

de sorte que $\Psi(x) - x$ ne décroît pas. On a donc en particulier

$$a_v - a_{v-1} \geq a_1 - a_0.$$

Posons $a_1 - a_0 = \Delta$, $\Psi'(a_0) = \Psi_0$. On a alors

$$a_v - a_{v-1} \geq \Delta > 0 \quad (v \geq 1),$$

$$\varphi'_-(a_n) = \Psi_0 \varphi'_+(a_n) \quad (\Psi_0 > 1).$$

Soit $\mu - 1$ le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{\Delta}$. Alors pour tout entier v , chaque intervalle $\langle v, v + 1 \rangle$ contient μ points a_λ au plus, c'est-à-dire au plus μ points de discontinuité de $\varphi'_+(x)$.

Or, dans notre hypothèse, $\psi'(x)$ ne décroît pas, donc d'après (III, 5) dans un intervalle de continuité $\varphi'_+(x)$ ne décroît pas et se trouve multipliée par $\psi'(a_1) = \frac{1}{\Psi_0} < 1$ à chaque passage par un point de discontinuité a_v . Il en résulte qu'on a pour chaque entier $v \geq 1$

$$\varphi'_+(\nu) \geq \Psi_0^{-\mu} \varphi'_+(x) \quad (\nu \leq x \leq \nu + 1), \quad (\text{IV, 5})$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_+(\nu) &\leq \Psi_0^\mu \varphi'_+(x), \\ \varphi(\nu) &\geq \varphi(x) - \mu - 1 \end{aligned} \right\} \quad (\nu \leq x \leq \nu + 1). \quad (\text{IV, 6})$$

La dernière inégalité résulte de ce que, $\varphi'_+(x)$ étant toujours positive, la fonction $\varphi(x)$ croît constamment et accroît d'une unité dans chaque intervalle $\langle a_{v-1}, a_v \rangle$.

Or, en vertu de (IV, 5), on obtient

$$\varphi'_+(\nu) \geq \Psi_0^{-\mu} \int_{\nu-1}^{\nu} \varphi'_+(x) dx,$$

et la divergence de la série (II, 4) résulte de celle de l'intégrale (IV, 1). D'autre part on a, en vertu de (IV, 6),

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leq \frac{\Psi_0^{\mu} \varphi'_+(x)}{(\varphi(x) - \mu - 1)^2} \quad (\nu \leq x \leq \nu + 1),$$

dès que $\varphi(x) \geq 2\mu + 2$, donc

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leq 4 \Psi_0^{\mu} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} \quad (\nu \leq x \leq \nu + 1, \quad \varphi(x) \geq 2\mu + 2),$$

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leq 4 \Psi_0^{\mu} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} dx \quad (\varphi(\nu) \geq 2\mu + 2),$$

et la convergence de la série (II, 5) résulte de celle de l'intégrale (IV, 2).

V. Énoncé du résultat obtenu.

En rassemblant nos résultats nous avons le théorème suivant:

C. Soit $\Psi(x)$ une fonction de x continue, possédant une dérivée positive et continue pour $x \geq a_0$ et telle que l'on ait

$$\Psi(x) > x \quad (x \geq a_0).$$

Supposons que $\Psi'(x)$ satisfait à l'une des deux conditions suivantes: ou bien $\Psi'(x)$ ne décroît pas à partir d'un x et atteint ou dépasse la valeur un: ou bien $\Psi'(x)$ ne croît pas à partir d'un x . Alors:

a) Si $f(x)$ est positive à partir d'un x et est sommable tandis que $\frac{1}{f(x)}$ reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de $f(x)$ et si l'on a à partir d'un x