

I. — Propriétés fondamentales du réseau quadrillé.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE

(2^{me} article) ¹.

PAR

Johannes HJELMSLEV (Copenhague).

LA GÉOMÉTRIE DU PLAN QUADRILLÉ

I. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DU RÉSEAU QUADRILLÉ.

1. — Dans un réseau quadrillé limité par le rectangle OABC l'on détermine chaque nœud P par les deux nombres entiers r et s (coordonnées) qui indiquent le nombre d'unités contenues dans

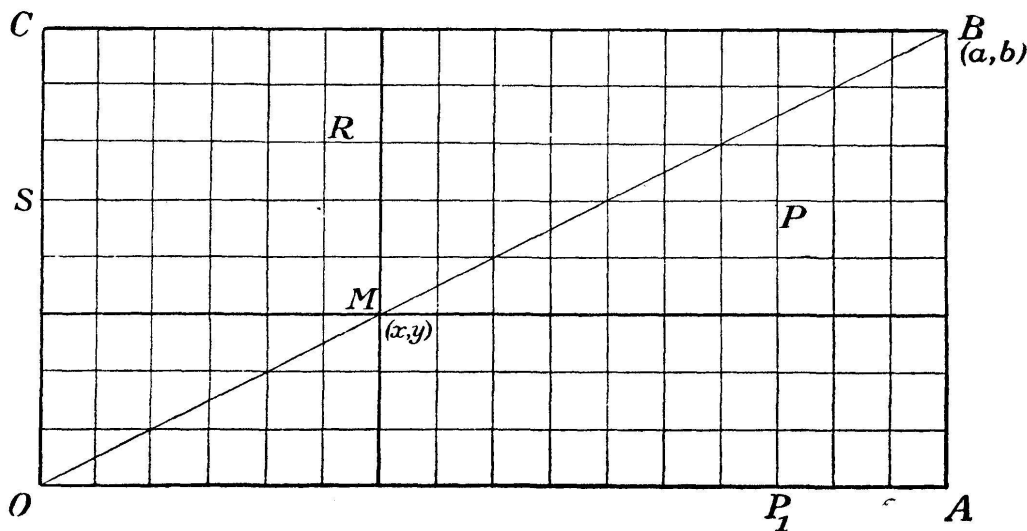


Fig. 1.

les segments OP_1 et P_1P . L'on écrit $P = (r, s)$. En particulier $O = (0, 0)$, $B = (a, b)$.

La diagonale OB traverse sur la figure quelques-uns des nœuds intérieurs. Soit $M = (x, y)$ l'un d'entre eux. Les deux

¹ Pour le premier article, voir *L'Ens. math.*, t. 38, p. 7-26.

lignes formant le nœud M divisent tout le rectangle en quatre rectangles, un de chaque côté de la diagonale, et deux autres traversés par celle-ci. *Les deux premiers contiennent toujours le même nombre de mailles du réseau* ; car les deux grands triangles que la diagonale produit en divisant tout le rectangle contiennent le même nombre de mailles entières, et les petits triangles au-dessus de la diagonale contiennent autant de mailles entières que les petits triangles sous la diagonale. En soustrayant l'on voit que les deux rectangles CM et MA qui ne sont pas traversés par la diagonale contiennent exactement le même nombre de mailles. Ajoutons à chacun de ces rectangles le rectangle OM et nous obtenons

$$ay = bx , \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{a}x .$$

2. — Soit P un nœud qui se trouve sous la diagonale, c'est-à-dire dans le triangle OAB. Ses coordonnées x , y , satisferont à l'inégalité

$$y < \frac{b}{a}x .$$

Pourquoi ? Tout d'abord il y a autant de mailles entières, disons k , au-dessus et au-dessous de la diagonale ; ensuite, puisque P se trouve au-dessous de la diagonale, il se trouve au moins $k + 1$ mailles entières au-dessus de la ligne brisée OPB, alors qu'il y en a k au plus au-dessous de celle-ci. Mais le rectangle OP contient le même nombre de mailles de chaque côté de la diagonale OP, et de même le rectangle PB contient le même nombre de mailles de chaque côté de la diagonale PB. En soustrayant l'on voit que le rectangle CP contient plus de mailles que le rectangle PA, et en ajoutant le rectangle OP l'on voit qu'il y a plus de mailles à gauche de la ligne verticale par P qu'au-dessous de la ligne horizontale par P, c'est-à-dire

$$xb > ya , \quad \text{ou} \quad y < \frac{b}{a}x ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Quant aux points (x, y) au-dessus de la diagonale, l'on établit de la même façon que

$$y > \frac{b}{a}x .$$

3. — Imaginons le réseau quadrillé divisé en carrés plus fins dont le côté est $\frac{1}{n}$ de l'unité primitive; l'on pourra alors exprimer les nouveaux nœuds par des coordonnées fractionnaires. Mais l'on voit que le critère pour qu'un point (x, y) se trouve sur, au-dessus ou au-dessous de la diagonale OB, reste toujours respectivement

$$y = \frac{b}{a}x , \quad y > \frac{b}{a}x , \quad y < \frac{b}{a}x .$$

L'on dit alors que l'équation de la diagonale OB est $y = \frac{b}{a}x$.

Exemples. — Prenons $a = 87$, $b = 37$, et l'unité du réseau 1 cm; si nous cherchons l'ordonnée y au point sur OB dont l'abscisse est $x = 27$, nous obtenons

$$y = 11 \frac{14}{29} .$$

Si l'on ne veut calculer qu'en centimètres entiers, l'on sait donc que l'ordonnée se trouve entre 11 et 12 cm. Si l'on calcule en millimètres, l'on obtient

$$y = 114 \frac{24}{29}$$

c'est-à-dire que y se trouve entre 114 et 115 mm.

Si $x = 40$, l'unité du réseau étant toujours 1 cm, l'on a

$$y = 17 \frac{1}{87} \text{ cm} .$$

Nous trouvons ici, il est vrai, un nombre qui est plus grand que 17. Mais $\frac{1}{87}$ cm est peu de chose, si peu que cela existe à peine sur le dessin, et en tout cas sans importance en ce qui concerne beaucoup de mesurages. En calculant avec les mêmes nombres pour un réseau millimétrique l'on obtient $y = 17 \frac{1}{87}$ mm,

et cette petite fraction sera sans aucune importance dans le mesurage réel.

Les nombres que l'on obtient par de tels calculs peuvent donc être plus fins que les grandeurs à mesurer. Mais naturellement ils rendent quand même le service désiré, puisqu'ils fournissent toujours les nombres inférieurs et supérieurs dont on a besoin. L'on peut employer les nombres obtenus quelle que soit l'unité du réseau, mais ils peuvent dans quelques cas se révéler trop fins, de sorte qu'il faudra se servir de nombres plus grossiers; ces derniers se déduisent immédiatement des premiers.

4. — Considérons maintenant un réseau quadrillé qui remplit tout le plan à dessiner dont nous nous servons. Pour abrégé l'on appellera horizontales et verticales les deux rangées de lignes. Deux lignes perpendiculaires au milieu du plan sont les axes des coordonnées, la ligne horizontale est l'axe des x , la ligne verticale l'axe des y , leur point d'intersection est l'origine. L'on désigne chaque nœud par deux coordonnées x et y , de sorte que x (l'abscisse) désigne le nombre d'unités qu'il faut parcourir le long de l'axe des x , en partant de l'origine, pour arriver à la ligne verticale qui traverse le point considéré, tandis que y (l'ordonnée) désigne le nombre d'unités qu'il faut ensuite parcourir le long de cette ligne verticale pour atteindre le point lui-même. Il faut cependant remarquer ici que l'on munit ces deux nombres de signes; pour l'abscisse $+$ ou $-$ selon que l'on parcourt l'axe des x à droite ou à gauche, pour l'ordonnée $+$ ou $-$ selon que l'on monte ou descend de l'axe des x pour atteindre le point; on désigne le point même par (x, y) .

Il y a ainsi une correspondance entre l'ensemble de nœuds et tous les systèmes possibles de deux nombres entiers, positifs, négatifs, ou zéro, situés dans les limites que trace le plan à dessiner.

5. — Le réseau de nœuds peut se déplacer « sur lui-même » le long de l'axe des x ou de l'axe des y , de sorte qu'un nœud se déplace sur un autre. Une telle translation le long de l'axe des x augmentera toutes les abscisses d'un même nombre (positif ou négatif) tandis que les ordonnées resteront invariables. Le

contraire se produit si la translation a lieu le long de l'axe des y . Si l'on effectue une translation le long de l'axe des x et une translation le long de l'axe des y l'une après l'autre, le déplacement total correspondra à une simple translation qui déplace le point $(0, 0)$ sur un autre nœud quelconque (a, b) . Cette translation déplace un nœud quelconque (x, y) sur le nœud $(x + a, y + b)$, de sorte que l'on peut exprimer la transformation comme suit :

$$(x, y) \longrightarrow (x + a, y + b) .$$

6. — Un réseau peut se déplacer sur lui-même d'autres façons. On peut lui faire subir une rotation de 90° autour de l'origine, de sorte que l'axe positif des x recouvre l'axe positif des y . L'on voit alors que le point (x, y) se trouve en $(-y, x)$. L'on peut aussi envisager une rotation du côté opposé, par laquelle $(x, y) \longrightarrow (y, -x)$.

Si l'on effectue, deux fois de suite, du côté positif une rotation de 90° autour de l'origine, le point (x, y) se trouvera en $(-x, -y)$. L'on appelle ce déplacement une demi-rotation autour de l'origine.

Enfin le réseau coïncide avec lui-même, grâce à une symétrie par rapport à l'axe des x ou à l'axe des y ; l'une des coordonnées change alors de signe, tandis que l'autre reste invariable.

7. — L'on constate maintenant que la ligne droite qui unit $(0, 0)$ à (a, b) , a et b étant positifs, et qui se prolonge de façon à contenir aussi $(-a, -b)$, a pour équation

$$y = \frac{b}{a} x ,$$

Ceci veut dire que tous les nœuds (x, y) qui se trouvent sur cette ligne satisfont à l'équation, tandis que les nœuds (x, y) au-dessus et au-dessous de la ligne satisfont aux inégalités

$$y \geq \frac{b}{a} x .$$

Ce que l'on voit directement à l'aide de 1 et 2. Au moyen d'une

symétrie (un mirage) par rapport à l'axe des x l'on obtient une ligne droite dont l'équation est

$$y = -\frac{b}{a}x,$$

ce qui permet de constater que toutes les lignes obliques qui unissent l'origine à d'autres nœuds peuvent être représentées par l'équation

$$y = \alpha x, \quad \text{ou} \quad \alpha \geq 0.$$

8. — L'on constate ensuite par une translation de $(0, 0)$ sur (p, q) qu'une ligne droite qui traverse (p, q) et qui est parallèle à la ligne $y = \alpha x$, peut être représentée par l'équation

$$y - q = \alpha(x - p),$$

où α s'appelle la pente de la ligne.

Puisque le point (a, b) se déplace sur $(-b, a)$ par une rotation de 90° du côté positif, autour de l'origine, l'on constate que les pentes de deux droites perpendiculaires peuvent s'exprimer par $\frac{b}{a}$ et $-\frac{a}{b}$, c'est-à-dire que le produit des pentes est égal à -1 .

9. — L'on joint à ces éléments préliminaires de la géométrie analytique du réseau quadrillé des exemples variés, tels que détermination de lignes droites par deux points, de lignes perpendiculaires l'une sur l'autre, de lignes parallèles, du point d'intersection de deux lignes, etc...

Mais tout notre domaine de travail n'est toujours que le réseau quadrillé empirique dans le plan à dessiner, où les coordonnées sont des nombres entiers, en introduisant cependant — par une réduction de l'unité du réseau — les nombres fractionnaires au fur et à mesure que les applications le nécessitent.

II. — INTRODUCTION DES VECTEURS.

10. — Nous travaillons toujours à l'aide du système de coordonnées introduit dans le chapitre précédent. Pour abrégé, introduisons les notions suivantes: