III. — Préliminaires de la première solution d'Euler.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

d'une étonnante simplicité [1]. L'étude de la même figure mène aux relations suivantes:

$$\sin \mathrm{MCT} = \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}}, \qquad \cos \mathrm{MCT} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}}; \qquad (6)$$

comme l'angle CMO est le double de CMT, on a encore

$$\sin \mathrm{CMO} = \frac{2s}{r^2 + s^2}, \qquad \cos \mathrm{CMO} = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2}. \qquad (6')$$

Si enfin on appelle U l'intersection du rayon réfléchi avec la droite CT (qui est la perpendiculaire menée du point C à la tangente au point M), on voit que l'angle TMU étant lui aussi égal à μ, les deux triangles CMT et MTU sont égaux, le triangle CMU est isocèle et la tangente n'est que la perpendiculaire menée à sa base par son milieu.

Remarque. — Les formules (6), (6′) et les dernières observations nous donnent l'occasion de relever, comme un caractère des procédés eulériens, l'habitude du grand géomètre de déterminer *toutes* les propriétés et de calculer *tous* les éléments de la figure considérée, même si les unes et les autres n'ont pas une liaison évidente avec la question étudiée; nous rencontrerons plus bas (voyez par exemple les dernières lignes du n° 7) des exemples de l'utilité de ce système.

III. — Préliminaires de la première solution d'Euler.

5. — Comme les coniques à centre nous assurent que le problème catoptrique est résoluble, on est en droit de considérer sur la courbe cherchée EF (fig. 2) deux points MM*, tels que le rayon, MM* premier réfléchi de CM, donne par une nouvelle

[1] Nous invitons le lecteur qui a des doutes sur la justesse de notre appréciation de ce résultat à comparer la formule (4′) à sa correspondante dans le système cartésien. En écrivant l'équation du rayon réfléchi (voyez la Remarque à la fin du n° 9) sous la forme $\mathrm{P}(\mathrm{X} - x) + \mathrm{Q}(\mathrm{Y} - y) = 0$, où P et Q sont des polynômes quadratiques en x, y, y', on a

$$\mathrm{MO} = -\frac{\mathrm{P} + \mathrm{Q}y'}{\begin{vmatrix} \mathrm{P} & \mathrm{Q} \\ \mathrm{P}' & \mathrm{Q}' \end{vmatrix}}.$$

réflexion le rayon M* C. Il est alors évident que le rayon réfléchi de CM* ramènerait au point C après une nouvelle réflexion; donc les points M et M* sont entre eux dans une relation permutable.

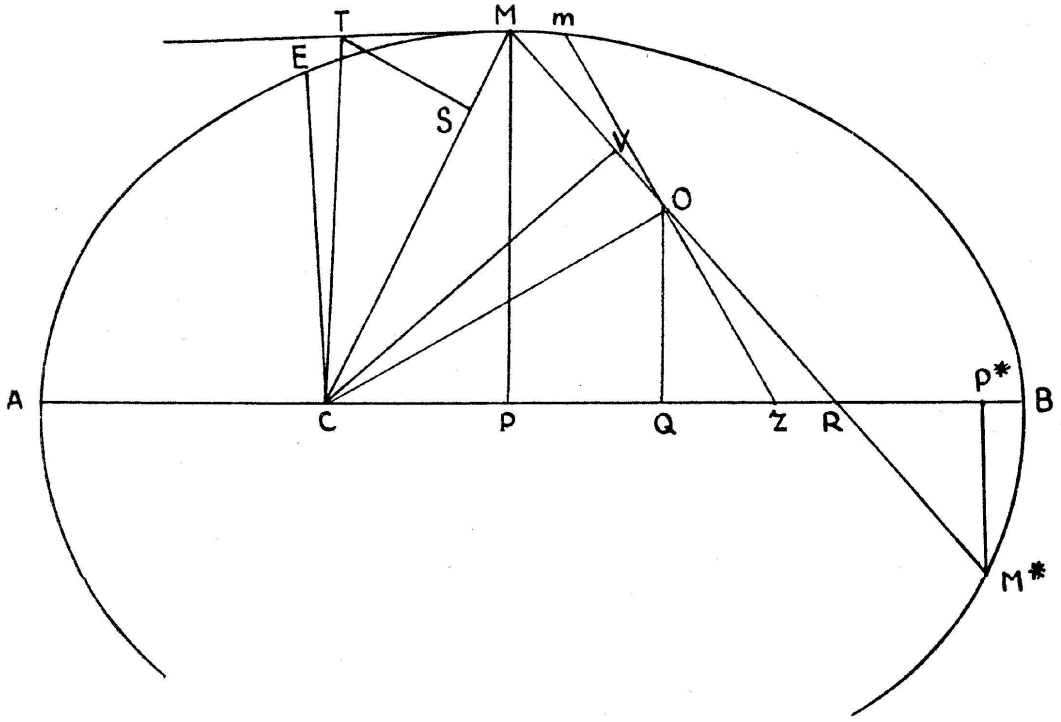


Fig. 2.

Sur le point M* répétons les constructions et les considérations que nous avons exposées sur M, en employant les mêmes lettres avec un astérisque; seulement, par rapport aux signes des grandeurs, on doit tenir compte du sens des figures. Suivant Euler, on a alors cette double liste de formules:

$$CT = r\ ,\quad TS = s$$

$$CT - \sqrt{r^2 + s^2}\ ,\quad CM - \frac{r^2 + s^2}{r}$$

$$MT = \frac{s}{r}\sqrt{r^2 + s^2}$$

$$\sin CMO = \frac{2rs}{r^2 + s^2}\ ,\quad \cos CMO = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2}$$

$$MO = \frac{2s\,ds}{dr} + \frac{r^2 - s^2}{r}$$

$$C^*S^* = r^*\ ,\quad T^*S^* \equiv s^*$$

$$C^*T^* = \sqrt{r^{*2} + s^{*2}}\ ,\quad CM^* - \frac{r^{*2} + s^{*2}}{r^*}$$

$$M^*T^* = -\frac{s^*}{r^*}\sqrt{r^{*2} + s^{*2}}$$

$$\sin CM^*O = \frac{2r^*s^*}{r^{*2} + s^{*2}}\ ,\quad \cos CM^*O = \frac{r^{*2} - s^{*2}}{r^{*2} + s^{*2}}$$

$$M^*O = \frac{2s^*\,ds^*}{dr^*} + \frac{r^{*2} - s^{*2}}{r^*}$$

En menant la droite CV perpendiculaire au rayon MM* on aura les relations suivantes [1]:

$$CV = 2s\ , \quad MV = \frac{r^2 - s^2}{r}$$

$$OV = -\frac{2s\,ds}{dr}\ , \quad CO = \frac{2s\sqrt{dr^2 + ds^2}}{dr}$$

$$\operatorname{tg} COM = \frac{dr}{ds}$$

$$CV = -2s^*\ , \quad M^*V = \frac{r^{*2} - s^{*2}}{r^*}$$

$$OV = \frac{2s^*\,ds^*}{ds^*}\ , \quad CO = -\frac{2s^*\sqrt{dr^{*2} + ds^{*2}}}{dr^*}$$

$$\operatorname{tg} COM^* = -\frac{dr^*}{ds^*}$$

On en tire $s^* = -s$, $-\frac{2s\,ds}{dr} = \frac{2s^*\,ds^*}{dr^*}$; d'où $dr^* + dr = 0$.

En intégrant on peut écrire $r^* + r = 2a$. Si donc on pose $r = a + \varphi$, on aura $r^* = a - \varphi$, φ étant une *fonction impaire* de s; en choisissant *ad libitum* une fonction de cette espèce, la relation $CS = a + \varphi$ déterminera une des courbes cherchées.

REMARQUE. — Rappelons qu'on a:

$$CS = r = \rho \sin^2 \mu\ , \qquad \operatorname{tg} \mu = -\frac{\rho\,d\omega}{d\rho}\ , \qquad s = \rho \sin \mu \cos \mu\ ;$$

il s'ensuit

$$\sin \mu = \frac{\rho\,d\omega}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2\,d\omega^2}}\ , \qquad \cos \mu = \frac{d\rho}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2\,d\omega^2}}\ ,$$

$$s = -\frac{\rho^2\,d\rho\,.\,d\omega}{d\rho^2 + \rho^2\,d\omega^2}$$

et la relation trouvée par Euler devient

$$\frac{\rho^2\,d\omega^2}{d\rho^2 + \rho^2\,d\omega^2} + a + \varphi\left(\frac{\rho^2\,.\,d\rho\,.\,d\omega}{d\rho^2 + \rho^2\,d\omega^2}\right) = 0\ ;$$

c'est l'équation différentielle générale des courbes catoptriques; nous allons voir comment Euler arrive à l'intégrer complètement, quelle que soit la fonction φ.

---

1 Les relations précédentes, comme les suivantes, ont été déjà prouvées, ou bien peuvent se déduire des autres; par exemple on a

$$CV = CM \sin 2\mu = \frac{r^2 + s^2}{r}\,\frac{2rs}{r^2 + s^2} = 2s\,.$$