

# SUR LA DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE LA LOI DES ERREURS

Autor(en): **Lévy, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515784>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LA DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE LA LOI DES ERREURS

PAR

Paul LÉVY (Paris).

---

Au cours d'une des séances du Colloque sur les applications du Calcul des probabilités qui vient d'avoir lieu à Genève du 12 au 15 juillet 1939, M. FRÉCHET a insisté sur la difficulté qu'il pouvait y avoir à reconnaître pratiquement si les erreurs expérimentales obéissent bien à la loi de Laplace-Gauss, et fait allusion à une étude relative à de nombreuses séries de 500 expériences chacune, dont le résultat fut qu'on pouvait souvent hésiter entre cette loi et la première loi de Laplace. J'ai alors exprimé mon étonnement en présence de ce fait. Quelques calculs effectués après cette séance m'ont conduit à reconnaître qu'il était plus difficile que je ne l'avais d'abord pensé de distinguer pratiquement ces deux lois, mais qu'avec une méthode convenable cela n'est pourtant pas aussi difficile que ne le laissent penser les résultats cités par M. Fréchet. Peut-être n'est-il pas inutile d'indiquer ici ces calculs.

Je désignerai respectivement par  $L_1$  et  $L_2$  la première et la seconde des lois étudiées par Laplace (la seconde étant celle de Laplace-Gauss), c'est-à-dire celles qu'un changement d'unité ramène aux formes réduites suivantes :

$$\text{pour } L_1 \quad f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

$$\text{pour } L_2 \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$f(x)$  désignant dans les deux cas la densité de probabilité. En désignant par  $E_p$  la valeur probable de  $|x|^p$ , on a

$$\begin{aligned} \text{pour } L_1 & \left\{ \begin{array}{l} E_1 = 1, \quad E_2 = 2, \quad E_4 = 24, \\ q_2 = \frac{E_2}{E_1^2} = 2, \quad q_4 = \frac{E_4}{E_1^4} = 24, \end{array} \right. \\ \text{pour } L_2 & \left\{ \begin{array}{l} E_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad E_2 = 1, \quad E_4 = 3, \\ q_2 = \frac{\pi}{2} = 1,5708, \quad q_4 = \frac{3\pi^2}{4} = 7,4022. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'une série de  $n$  expériences donne des résultats  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , et calculons les moments observés  $E'_p$  par la formule

$$E'_p = \frac{1}{n} \sum |x_v^p|.$$

Chaque  $E'_p$  est une variable aléatoire dont la valeur probable est  $E_p$ ; l'écart quadratique moyen  $\sigma_p$  est défini par

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} (E_{2p} - E_p^2).$$

Nous représenterons par  $\xi_1, \xi_2, \xi_4$ , et, plus loin, par  $\eta_2$  et  $\eta_4$ , des variables aléatoires réduites. On peut alors écrire

$$\text{pour } L_1 \quad E'_1 = 1 + \frac{\xi_1}{\sqrt{n}}, \quad E'_2 = 2 \left( 1 + \sqrt{\frac{5}{n}} \xi_2 \right), \quad E'_4 = 24 \left( 1 + \sqrt{\frac{69}{n}} \xi_4 \right)$$

pour  $L_2$

$$E'_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( 1 + \sqrt{\frac{0,57}{n}} \xi_1 \right), \quad E'_2 = 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \xi_2,$$

$$E'_4 = 3 \left( 1 + \sqrt{\frac{32}{3n}} \xi_4 \right).$$

Si  $n$  est grand,  $\xi_1, \xi_2$  et  $\xi_4$  sont sensiblement des variables gaussiennes indépendantes.

En introduisant alors les quotients

$$q'_{2p} = \frac{E'_{2p}}{E_p'^2},$$

et supposant  $n$  assez grand, on trouve:

pour  $L_1$

$$q'_2 = q_2 \left( 1 + \sqrt{\frac{5}{n}} \xi_2 - \frac{2\xi_1}{\sqrt{n}} \right) = 2 \left( 1 + \frac{3\eta_2}{\sqrt{n}} \right),$$

$$q'_4 = q_4 \left( 1 + \sqrt{\frac{69}{n}} \xi_4 - \frac{4\xi_1}{\sqrt{n}} \right) = 24 \left( 1 + 9,22 \frac{\eta_4}{\sqrt{n}} \right),$$

pour  $L_2$

$$q'_1 = q_2 \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \xi_2 - \sqrt{\frac{2,28}{n}} \xi_1 \right) = 1,57 \left( 1 + 2,07 \frac{\eta_2}{\sqrt{n}} \right)$$

$$q'_4 = q_4 \left( 1 + \sqrt{\frac{32}{3n}} \xi_4 - \sqrt{\frac{9,12}{n}} \xi_1 \right) = 7,4 \left( 1 + 4,45 \frac{\eta_4}{\sqrt{n}} \right).$$

Ces calculs supposent bien entendu que le zéro soit connu. Il y aurait un terme correctif à introduire s'il fallait commencer par calculer, par exemple, la moyenne arithmétique des nombres d'une série d'observations pour la prendre comme origine des erreurs. Mais cette correction est négligeable.

Si  $n$  est grand,  $\eta_2$  et  $\eta_4$  sont sensiblement des variables gaussiennes; mais elles ne sont pas indépendantes, puisque l'une et l'autre contiennent un terme en  $\xi_1$ ; il y a entre elles une corrélation positive. L'étude simultanée de  $q'_2$  et  $q'_4$ , dans ces conditions, peut permettre de renforcer les conclusions que l'on pourrait tirer de la considération d'un seul de ces rapports pour distinguer pratiquement les lois  $L_1$  et  $L_2$ , mais pas dans les mêmes conditions que s'il s'agissait de variables indépendantes. Nous nous contenterons, dans ce qui suit, de supposer que l'on considère un seul des nombres  $q'_2$  et  $q'_4$ .

Si  $n$  est assez grand, par exemple  $n = 10.000$ , donc  $\sqrt{n} = 100$ , comme il est très peu probable qu'au cours d'une seule série d'expériences les valeurs absolues de  $\eta_2$  ou  $\eta_4$  dépassent 3,  $q'_2$  sera compris entre 1,8 et 2,2 s'il s'agit de la loi  $L_1$ , et entre 1,45 et 1,7 s'il s'agit de  $L_2$ ; de même  $q'_4$  sera compris entre 17 et 31 dans un cas, entre 6 et 9 dans l'autre. Un simple coup d'œil sur la valeur d'un de ces nombres, s'il s'agit d'un de ces deux cas, permet donc, avec très peu de chance d'erreur, de savoir lequel des deux, et  $q'_4$  donne à ce point de vue une certitude plus grande que  $q'_2$ . Il ne semble pas d'ailleurs qu'il y ait intérêt à introduire

des moments d'ordres plus élevés; pour  $q_{10}$ , par exemple, le rapport des valeurs relatives à  $L_1$  et  $L_2$ , est supérieur à 10.000; mais l'erreur relative commise en remplaçant  $q_{10}$  par  $q'_{10}$  est aussi très grande, et  $q'_{10}$  peut très bien ne pas indiquer du tout l'ordre de grandeur de  $q_{10}$ .

Si, comme dans les séries considérées par M. Fréchet, on prend  $n = 500$ , la distinction entre  $L_1$  et  $L_2$  devient beaucoup moins sûre. Les valeurs de  $q'_2$  qui ont autant de chances d'être obtenues dans un cas que dans l'autre sont les valeurs voisines de 1,7, et il y a environ une chance sur cinq que  $L_1$  conduise à une valeur inférieure à 1,7 ou qu'au contraire  $L_2$  conduise à une valeur supérieure à ce nombre. Si l'on considère différentes séries d'expériences, et que l'on ait des raisons *a priori* de penser que, pour toutes ces séries, la loi des erreurs soit une des lois  $L_1$  et  $L_2$ , toujours la même, on sera pratiquement fixé par l'observation de trois ou quatre séries; sur quatre séries, par exemple, il y en aura bien probablement au moins deux, et le plus souvent trois, qui donneront des résultats, soit nettement inférieurs à 1,7, soit nettement supérieurs, et cela exclura toute ambiguïté. Mais si la loi peut varier d'une expérience à l'autre, et que l'on convienne de rattacher une série à  $L_1$  si  $q'_2 > 1,7$  et à  $L_2$  si  $q'_2 < 1,7$ , on aura environ vingt pour cent d'attributions erronées.

Si l'on considère  $q'_4$ , au lieu de  $q'_2$ , la proportion d'attributions erronées est réduite à environ sept pour cent; on peut sans doute la réduire à cinq pour cent par un critère basé sur l'étude simultanée de  $q'_2$  et  $q'_4$ .

On voit que, contrairement à ce que j'avais pensé, une seule série de 500 expériences ne donne pas une conclusion sûre. Si l'on hésite entre les deux lois  $L_1$  et  $L_2$ , il peut arriver qu'il y ait forte présomption en faveur de l'une, ou bien de l'autre, ou bien qu'il y ait doute.

Pratiquement, si l'on procède à des vérifications expérimentales, c'est qu'il y a une certaine incertitude sur la loi de probabilité, et le choix ne sera pas limité à  $L_1$  et  $L_2$ . Si l'on considère vingt séries de 500 expériences, on ne saura même pas *a priori* si la même loi convient à toutes les séries. Mais, sur ce point, les résultats des expériences renseigneront assez bien. Si l'on trouve

pour  $q'_2$  des valeurs s'échelonnant de 1,40 à 1,75, il y aura une forte présomption en faveur de la loi  $L_2$ , pour toutes les séries; de 1,65 à 2,40, ce sera la loi  $L_1$ ; de 1,50 à 2, ce sera une loi intermédiaire entre  $L_1$  et  $L_2$ , mais ne variant pas d'une série à l'autre. Si au contraire les résultats obtenus donnent une dispersion assez grande,  $q'_2$  variant par exemple de 1,40 à 2,40, il y a lieu de penser que la loi n'est pas la même pour toutes les séries; l'hypothèse que ce soit tantôt  $L_1$ , tantôt  $L_2$ , est alors plausible, mais ce sera plus probablement une loi contenant au moins un paramètre variable et qui varie de  $L_1$  à  $L_2$ .

Bien entendu enfin on ne devra pas exprimer de conclusion définitive sans avoir rapproché les résultats statistiques de l'étude des conditions des expériences. Si, par exemple, quinze séries d'expériences sont comparables entre elles et que les cinq autres aient été effectuées dans des conditions différentes, c'est un fait dont il faudra évidemment tenir compte.

---

## SUR UN PROCÉDÉ MIXTE POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES DE CAUCHY ET DE GOURSAT RELATIFS A L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

PAR

Radu BADESCO (Cluj, Roumanie).

---

Le problème célèbre de la télégraphie dans un fil rectiligne indéfini, ramené pour la première fois par KIRCHHOFF à une équation aux dérivées partielles du type

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + B \frac{\partial U}{\partial t} - C \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont des constantes positives, a été étudié de différents points de vue par un grand nombre de savants. Les travaux