

MÉTHODES IMMÉDIATES D'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

Autor(en): **Saltykow, N.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515778>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

MÉTHODES IMMÉDIATES D'INTÉGRATION
D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DU SECOND ORDRE ¹

PAR

N. SALTYKOW (Belgrade).

INTRODUCTION.

On exposera, dans les lignes qui vont suivre, quelques considérations concernant l'enseignement de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Il s'agit précisément des procédés intuitifs d'intégration. Les questions analogues se posent toujours, lorsque l'on aborde l'étude d'une classe quelconque d'équations différentielles. C'est de cette manière que les méthodes d'intégration connues ont pris ordinairement leur naissance.

Nous appellerons *méthodes immédiates* les procédés qui permettraient d'obtenir les intégrales des équations considérées, aux dérivées partielles du second ordre, en mettant ces dernières sous une forme, dont l'intégration est évidente, comme, par exemple, la forme d'une dérivée exacte. On y réussit souvent, en groupant convenablement les termes des équations considérées, ou grâce à la transformation des variables, ou encore par différentiation.

¹ Le sujet de ce travail représente une revision des principes exposés par l'auteur, comme introduction, dans les conférences *Sur les Méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* professées, ces dernières années, dans les Universités belges sous les auspices de la *Fondation universitaire de Belgique*. Les résultats de ces recherches furent présentées à la séance de l'Académie Royale Serbe des Sciences, le 25 septembre 1939.

Le *Traité de Calcul intégral* d'EULER représente jusqu'aujourd'hui une œuvre modèle sur ce genre d'études, même en prenant en considération les progrès énormes acquis par la Science moderne.

Or, tandis que les méthodes immédiates d'intégration sont exposées, dès le début, dans les traités d'équations différentielles ordinaires, on ne s'en occupe presque pas dans la théorie d'équations aux dérivées partielles, surtout du second ordre. Ces méthodes n'y sont pas favorisées. En effet, la fécondité d'une nouvelle méthode quelconque que l'on introduit, en Mathématiques, est prouvé par des applications aux exemples. On choisit ces derniers de telle manière que l'application, aux mêmes exemples, d'autres méthodes ne produise pas de bons résultats. Quant aux équations aux dérivées partielles du second ordre, ce n'est pas toujours le cas.

Citons, par exemple, l'excellente exposition de la méthode de Monge-Ampère donnée par G. DARBOUX¹. Elle est suivie de quatre exemples que l'on expose ordinairement dans ce but : l'équation des surfaces développables, celle des surfaces aux lignes de courbure planes, des surfaces réglées à plan directeur et l'équation de la théorie mécanique de la chaleur.

Cependant tous ces problèmes admettent une solution immédiate la plus élémentaire. Les solutions de deux premiers problèmes se trouvent respectivement dans le *Traité d'Analyse* de M. E. PICARD (T. I, 1891, p. 296) et dans le *Cours d'Analyse* de G. HUMBERT (T. II, 1904, p. 471). Les deux autres équations mentionnées seront intégrées plus loin, au chapitre IV.

A présent exposons, pour fixer les idées, plusieurs procédés d'intégration immédiate.

I. — RÉDUCTION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

Considérons, d'abord, les équations ne contenant qu'une paire de dérivées qui soient prises par rapport à une seule et même variable indépendante, à savoir p et r , ou q et t , en conservant

¹ *Leçons sur la Théorie des surfaces*. Troisième partie. Paris, 1894, p. 273, n° 716.

les désignations habituelles des dérivées du premier et du second ordre. Par conséquent, les équations dont il s'agit, se présentent sous l'une de deux formes générales suivantes:

$$F(x, y, z, p, r) = 0, \quad (1)$$

$$\Phi(x, y, z, q, t) = 0. \quad (2)$$

L'équation (1) peut donc s'écrire:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0.$$

On intègre cette dernière équation comme une équation aux différentielles ordinaires à une fonction inconnue z d'une variable indépendante x , considérant y au titre d'un paramètre constant; mais, en revanche, les constantes arbitraires de l'intégrale générale de cette dernière équation doivent être remplacées par deux fonctions arbitraires de y .

D'une manière analogue, dans la seconde équation (2), la variable x est considérée au titre d'un paramètre constant. Quant à l'intégrale générale de l'équation en question (2), elle dépendra de deux fonctions arbitraires de x .

Un autre type d'équations aux dérivées partielles du second ordre intégrables, par un procédé analogue, se met sous l'une de deux formes suivantes:

$$F(x, y, p, s) = 0, \quad (3)$$

$$\Phi(x, y, q, s) = 0. \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) ne contiennent point explicitement la fonction inconnue z ; mais, outre la seule dérivée mixte du second ordre s , chacune des équations n'admet que l'une des dérivées du premier ordre p ou q .

C'est par rapport à ces dernières dérivées que les équations étudiées deviennent aux différenciations ordinaires du premier ordre. En effet, les équations (3) et (4) peuvent être mises respectivement sous la forme suivante:

$$F\left(x, y, p, \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0, \quad (5)$$

$$\Phi\left(x, y, q, \frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0. \quad (6)$$

L'équation (5) est donc différentielle ordinaire du premier ordre par rapport à la fonction inconnue p de la variable indépendante y , en traitant x comme une constante. L'intégrale générale de l'équation (5) va s'écrire, par conséquent, de la manière suivante:

$$f(x, y, p, X) = 0, \quad (7)$$

X désignant une fonction arbitraire de x , qui s'introduit, au lieu d'une constante arbitraire d'intégration.

L'équation obtenue (7) est encore différentielle ordinaire du premier ordre par rapport à la fonction inconnue z , car on a

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},$$

la variable y est, à présent, à considérer comme une valeur constante. Supposons que l'on obtienne, en résolvant l'équation (7) par rapport à p :

$$p = \theta(x, X, y). \quad (8)$$

Grâce à l'hypothèse introduite par rapport à y , l'équation (8) donne, par quadrature, l'intégrale générale de l'équation (3)

$$z = \int \theta(x, X, y) \partial x + Y,$$

où Y est la seconde fonction arbitraire qui ne dépend que de y .

La seconde équation (6) va s'intégrer d'une manière analogue; et l'intégrale générale de l'équation (4) impliquera deux fonctions arbitraires, dont la première ne contient que y et la seconde sera une fonction de la variable x .

II. — RÉDUCTION AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

Considérons, d'abord, les équations de la forme suivante:

$$F(x, y, p, r, s) = 0, \quad (1)$$

$$\Phi(x, y, q, s, t) = 0. \quad (2)$$

Chacune de ces équations se met immédiatement sous la forme d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. En effet, on les écrit aisément de la manière suivante:

$$F\left(x, y, p, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0, \quad (3)$$

$$\Phi\left(x, y, q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}\right) = 0. \quad (4)$$

Un cas très simple se présente, par exemple, si les équations données (1) et (2) sont respectivement linéaires par rapport aux dérivées partielles du second ordre. Les équations (3) et (4) sont alors linéaires respectivement par rapport aux dérivées $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$, ou bien par rapport à $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}$.

Si l'on suppose, par exemple, que l'équation (3) soit linéaire, son intégrale générale va devenir:

$$p = u(x, y) + \varphi[\varrho(x, y)], \quad (5)$$

φ désignant une fonction arbitraire et u, ϱ admettant des valeurs bien déterminées.

L'équation (5) produit l'intégrale générale requise, au moyen d'une quadrature partielle par rapport à la variable x :

$$z = \int \{u(x, y) + \varphi[\varrho(x, y)]\} dx + Y,$$

Y désignant une fonction arbitraire de la variable indépendante y .

On trouve, chez E. Goursat, deux autres cas d'équations qui jouissent des propriétés analogues et se présentent sous les formes suivantes:

$$F\left(x, z, p, r, \frac{s}{q}\right) = 0, \quad (6)$$

$$\Phi\left(y, z, q, \frac{s}{p}, t\right) = 0. \quad (7)$$

En cherchant la solution de l'équation (6) sous la forme

$$p = \mu(x, z),$$

on transforme l'équation (6) en une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport aux dérivées $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ et $\frac{\partial \mu}{\partial z}$, à savoir :

$$F\left(x, z, \mu, \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \mu, \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) = 0 .$$

Quant à l'équation (7), en y posant

$$q = \lambda(y, z) ,$$

elle va devenir une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport à $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$ et à $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$:

$$\Phi\left(y, z, \lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \lambda\right) = 0 .$$

III. — RÉDUCTION AUX ÉQUATIONS REPRÉSENTANT DES DÉRIVÉES EXACTES.

Considérons, par exemple, l'équation bien connue d'Ampère ¹ :

$$zs + \frac{z}{q^2} t + pq = 0 . \quad (1)$$

Elle s'écrit aisément sous la forme évidente :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(zp - \frac{z}{q} \right) + 1 = 0 .$$

Intégrant cette dernière équation, on obtient une équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$zp - \frac{z}{q} + y = X , \quad (2)$$

où X désigne une fonction arbitraire de la variable x .

Il serait avantageux, pour intégrer l'équation (2), d'y introduire la nouvelle fonction inconnue $z_1 = z^2$. L'équation (2) va devenir

$$p_1 - \frac{4z_1}{q_1} + 2y = 2X ,$$

¹ G. V. IMSCHENETSKY, *Etude sur les Méthodes d'Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*. Paris, 1872, p. 149 (n° 143).

p_1 et q_1 désignant respectivement les dérivées partielles $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_1}{\partial y}$. Cette dernière équation admet l'intégrale des caractéristiques:

$$q_1 = 2x + c_1 ,$$

c_1 étant une constante arbitraire. On représente, au moyen d'une quadrature, l'intégrale générale de l'équation (1), par l'ensemble de deux équations:

$$\begin{aligned} z^2 &= (2x + c_1)y + (2x - c_1)^2 \left[2 \int \frac{X dx}{(2x + c_1)^2} + \varphi(c_1) \right] , \\ y + 2(2x + c_1) \left[2 \int \frac{X dx}{(2x + c_1)^2} + \varphi(c_1) \right] + \\ &\quad + (2x + c_1)^2 \left[\varphi'(c_1) - 4 \int \frac{X dx}{(2x + c_1)^3} \right] = 0 , \end{aligned}$$

φ désignant la seconde fonction arbitraire du paramètre variable c_1 .

Citons comme second exemple l'équation de E. Goursat:

$$s = \varphi(z) pq , \quad (3)$$

la fonction φ étant quelconque. Cette dernière équation représente bien une dérivée exacte:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\log p - \int \varphi(z) dz \right] = 0 .$$

Il s'ensuit, au moyen de deux quadratures consécutives, l'intégrale générale de l'équation donnée (3):

$$\int e^{-\int \varphi(z) dz} dz = X + Y ,$$

X et Y désignant respectivement des fonctions arbitraires de x et de y .

L'équation (3) avait été généralisée par M. A. Demoulin de la manière suivante:

$$s = \frac{f'(z)}{f(z)} pq + f(z) F(x, y) , \quad (4)$$

les fonctions $f(z)$ et $F(x, y)$ étant quelconques¹.

¹ M. A. DEMOULIN avait donné cette dernière équation au *Bul. de la Société math. de France*, t. XXI (1893), en considérant au lieu de $F(x, y)$ un polynôme des produits $X_i Y_i$.

Il s'ensuit immédiatement

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{p}{f(z)} \right] = F(x, y) .$$

On obtient d'ici, au moyen de deux quadratures consécutives, l'intégrale générale requise :

$$\int \frac{dz}{f(z)} = \int \partial x \int F(x, y) \partial y + X + Y ,$$

X et Y désignant respectivement des fonctions arbitraires de x et de y .

On trouve, à la page 88 du tome III du *Cours d'Analyse mathématique de Goursat* (4^{me} éd., Paris, 1927), parmi les exercices, l'équation :

$$s = pq + e^z f(x, y) . \quad (5)$$

Cette dernière équation peut être traitée par la méthode exposée, car on a :

$$s = \frac{(e^z)'_z}{e^z} pq + e^z f(x, y) .$$

Il s'en suit, en effet, l'intégrale générale requise de l'équation (5) :

$$e^{-z} + \int \partial x \int f(x, y) \partial y + X + Y = 0 .$$

Intégrons, enfin, l'équation de M. Gau :

$$s = (e^z + e^{-z})p . \quad (6)$$

Elle est réductible à la différentielle exacte, comme il suit :

$$\frac{\partial}{\partial x} [q - \int (e^z + e^{-z}) dz] = 0 .$$

En intégrant cette dernière équation, on obtient :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^z - e^{-z} + Y ,$$

Y désignant une fonction arbitraire de la variable y . Si l'on y introduit, au lieu de z , la nouvelle fonction inconnue $u = e^z$, cette dernière équation devient ordinaire du type eulérien :

$$\frac{du}{dy} = u^2 + Yu - 1 .$$

En y remplaçant la fonction arbitraire Y par la formule

$$Y \equiv \frac{\theta' + 1}{\theta} - \theta ,$$

θ désignant la nouvelle fonction arbitraire de y , l'équation considérée admettra la solution particulière θ .

Cela étant, l'intégrale générale de l'équation (6) de M. Gau sera définie par l'ensemble des deux équations suivantes :

$$e^z = \theta - \frac{Y'}{X + Y} ,$$

$$Y = - \int e^{\int \left(\frac{\theta' + 1}{\theta} + \theta \right) dy} dy ,$$

θ et X désignant deux fonctions arbitraires respectivement de y et de x .

IV. — RÉDUCTION D'ÉQUATIONS AUX FORMES INTÉGRABLES PAR GROUPEMENT DES TERMES.

Il s'agit, dans les lignes qui vont suivre, de transformer les équations données aux dérivées partielles du second ordre en d'autres équations qui soient intégrables, en groupant d'une manière convenable les termes d'équations données.

Pour expliquer l'idée de ce procédé, intégrons, d'abord, l'équation classique de la corde vibrante :

$$r - a^2 t = 0 , \tag{1}$$

a désignant une constante arbitraire.

Ajoutons et retranchons le terme as au premier membre de

l'équation étudiée (1). Elle va immédiatement prendre l'une des deux formes suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x}(p \pm aq) \mp a \frac{\partial}{\partial y}(p \pm aq) = 0 ,$$

correspondant l'une aux signes supérieurs, et l'autre à ceux qui sont inférieurs. Chacune des deux équations obtenues est linéaire aux dérivées partielles du premier ordre par rapport au binôme $p \pm aq$, considéré comme nouvelle fonction inconnue.

Cela étant, on mettra leurs intégrales générales respectivement sous les formes suivantes :

$$\left. \begin{aligned} p + aq &= 2af'(y + ax) , \\ p - aq &= 2a\varphi'(y - ax) , \end{aligned} \right\} (2)$$

f' et φ' désignant les dérivées des fonctions arbitraires de leurs arguments; quant au facteur constant $2a$, on l'introduit pour simplifier le calcul qui va suivre.

Il suffit de l'une des deux équations intégrales obtenues (2) pour achever l'intégration de l'équation étudiée (1). En effet, chacune d'elles est linéaire aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction inconnue z .

En intégrant, par exemple, la première équation (2), on obtient l'intégrale générale requise :

$$z = f(y + ax) + \psi(y - ax) ,$$

f et ψ étant deux fonctions arbitraires de leurs arguments.

Or, comme les deux équations (2) sont compatibles, définissant les dérivées p et q de la même fonction z , cette dernière pourrait être définie, d'une autre manière encore, au moyen de l'intégration de la différentielle totale correspondante : $dz = p dx + q dy$.

Comme second exemple citons l'équation classique d'Euler

$$r - t + \frac{2p}{x} = 0 . \quad (3)$$

Il est aisé, en groupant les termes de cette dernière équation, de l'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p + q + \frac{z}{x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p + q + \frac{z}{x} \right) + \frac{1}{x} \left(p + q + \frac{z}{x} \right) = 0 .$$

Celle-ci étant linéaire aux dérivées partielles du premier ordre du trinôme $p + q + \frac{z}{x}$, considéré comme nouvelle fonction inconnue, l'intégrale générale, dans cette dernière hypothèse, devient :

$$p + q + \frac{z}{x} = \frac{2}{x} f'(x + y) ,$$

f' désignant une fonction arbitraire.

Or, l'équation obtenue est, à son tour, linéaire aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction inconnue z . Son intégrale générale va définir celle de l'équation d'Euler (3), sous la forme suivante :

$$z = \frac{1}{x} [f(x + y) + \varphi(x - y)] ,$$

φ étant la seconde fonction inconnue.

Un nouvel exemple est emprunté aux récentes recherches de la théorie des probabilités, où l'on considère l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{a'^2}{a} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'} \right) \frac{\partial f}{\partial t} = 0 , \quad (4)$$

a' et a'' désignant respectivement la première et la seconde dérivée de la fonction donnée $a(t)$, prises par rapport à t .

Les termes de l'équation écrite peuvent être groupés de deux manières différentes, tout étant mis en une formule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \pm i \frac{a'}{a} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mp i \frac{a'}{a} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \pm i \frac{a'}{a} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \\ + \left(\frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \pm i \frac{a'}{a} \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 . \end{aligned}$$

Par conséquent, l'intégration de l'équation (4) revient à celle d'un double système :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} \mp i \frac{a'}{a} \frac{\partial f}{\partial y} &= u , \\ \frac{\partial u}{\partial t} \mp i \frac{a'}{a} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'} \right) u &= 0 . \end{aligned} \right\} (5)$$

L'intégration de chacune des équations de la seconde ligne (5) produit deux valeurs distinctes u_1 et u_2 de la fonction u , correspondant respectivement aux signes supérieur et inférieur dans l'équation considérée:

$$u_1 = 2i \frac{a'}{a} \Phi'(y + i \log a) , \quad u_2 = -2i \frac{a'}{a} \Psi'(y - i \log a) ,$$

Φ' et Ψ' désignant deux fonctions arbitraires, les coefficients $2i$ et $-2i$ y étant introduits pour faciliter le calcul qui va suivre.

Cela étant, la fonction f est définie par l'ensemble des deux équations, en involution, aux dérivées partielles du premier ordre,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i \frac{a'}{a} \frac{\partial f}{\partial y} = 2i \frac{a'}{a} \Phi'(y + i \log a) ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} - i \frac{a'}{a} \frac{\partial f}{\partial y} = -2i \frac{a'}{a} \Psi'(y - i \log a) .$$

Il en résulte immédiatement, par une quadrature, l'intégrale générale requise de l'équation (4) sous la forme très simple:

$$f = \Phi(y + i \log a) + \Psi(y - i \log a) .$$

Revenons à présent à deux autres équations dont on a fait mention plus haut, dans les dernières lignes de l'introduction, et que G. Darboux intègre par la méthode de Monge-Ampère.

Quant à la première de ces équations, celle des surfaces réglées, à plan directeur normal à l'axe des cotes,

$$q^2 r - 2pq s + p^2 t = 0 , \quad (6)$$

elle peut être écrite de la manière suivante:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{q} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{q} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{array} \right| = 0 .$$

Il s'en suit, donc, la relation:

$$\frac{p}{q} = \varphi(z)$$

φ désignant une fonction arbitraire de z .

En multipliant la dernière relation par q , on obtient une équation linéaire, dont l'intégrale générale se présente sous la forme

$$y + x\varphi(z) = \psi(z) ,$$

ψ désignant la seconde fonction arbitraire. C'est l'intégrale générale de l'équation donnée (6).

Il est opportun de faire, à cette occasion, une remarque sur les surfaces réglées, dont le plan directeur occupe une position arbitraire quelconque dans l'espace. L'équation aux dérivées partielles correspondante devient alors:

$$(B + Cq)^2 r - 2(A + Cp)(B + Cq)s + (A + Cp)^2 t = 0 , \quad (7)$$

les coefficients A , B et C étant constants.

En introduisant la nouvelle fonction inconnue ϱ qui soit liée, avec l'ancienne, par la relation

$$\varrho = Ax + By + Cz ,$$

l'équation (7) transformée devient:

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varrho}{\partial x} \frac{\partial \varrho}{\partial y} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} = 0 .$$

Elle admet, donc, la forme de l'équation (6).

Enfin, si le plan directeur est parallèle à l'axe des z , l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées va devenir

$$B^2 r - 2ABs + A^2 t = 0 , \quad (8)$$

A et B représentant des coefficients constants.

L'équation (8) peut être écrite

$$B \frac{\partial}{\partial x} (Bp - Aq) - A \frac{\partial}{\partial y} (Bp - Aq) = 0 ,$$

et s'intègre immédiatement par l'une des méthodes suivantes. Il est aisé, d'abord, de considérer cette dernière équation comme linéaire aux dérivées partielles du premier ordre par rapport à la nouvelle fonction inconnue $Bp - Aq$.

Or, d'un autre point de vue, l'équation considérée est réductible à un système de Charpit¹. Il s'ensuit l'intégrale générale

$$Bz = xf(Ax + By) + \varphi(Ax + By),$$

où f et φ représentent deux fonctions arbitraires.

Passons, enfin, à la quatrième équation, celle de la théorie mécanique de la chaleur, figurant chez Darboux²:

$$rt - s^2 + a^2 = 0, \quad (9)$$

a étant un coefficient constant; elle peut être mise sous la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x}(p \pm ay) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(q \mp ax) - \frac{\partial}{\partial y}(p \pm ay) \frac{\partial}{\partial x}(q \mp ax) = 0.$$

Il s'en suit deux intégrales intermédiaires:

$$\begin{aligned} p + ay &= \varphi'(q - ax), \\ p - ay &= \psi'(q + ax), \end{aligned}$$

φ' et ψ' désignant les dérivées des deux fonctions arbitraires φ et ψ .

L'intégration peut être achevée en partant d'une seule de ces intégrales. Prenons, par exemple, la première. Si l'on y introduit la nouvelle fonction inconnue:

$$z_1 = z + axy,$$

la première intégrale considérée va devenir:

$$p_1 = \varphi'(q_1 - 2ax),$$

p_1 et q_1 désignant respectivement les dérivées $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_1}{\partial y}$.

Les variables étant séparées, on a l'intégrale complète

$$z_1 = -\frac{1}{2a} \varphi(C - 2ax) + Cy + C_1,$$

¹ N. SALTYKOW, Equations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par un système de Charpit (*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. II, 1933, p. 66).

N. SALTYKOW, Equations aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes intégrables par un système de Charpit (*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. III, 1934, p. 161).

² Voir plus haut, p. 133, *loc. cit.*

C et C_1 étant deux constantes arbitraires. En formant l'intégrale générale et revenant à l'ancienne fonction inconnue, on obtient l'intégrale générale de l'équation considérée (9) sous la forme d'un ensemble des deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} z + axy &= -\frac{1}{2a} \varphi(C - 2ax) + Cy + \theta(C) , \\ -\frac{1}{2a} \varphi'(C - 2ax) + y + \theta'(C) &= 0 , \end{aligned}$$

θ désignant la seconde fonction arbitraire et C étant un paramètre variable.

Il est aisé, d'une autre manière, de profiter des deux intégrales intermédiaires obtenues. On pourrait les intégrer simultanément, au moyen d'une quadrature, si l'on parvenait à tirer la dérivée q hors de l'argument des fonctions arbitraires ¹.

Certes, on y réussit aisément, grâce à la transformation de Legendre, en prenant q pour nouvelle variable indépendante que l'on désignera par Y. En revenant, après la quadrature effectuée, aux anciennes variables, on obtient l'intégrale cherchée sous la forme d'un ensemble de deux équations :

$$\begin{aligned} z &= y Y + \frac{1}{2a} [\psi(Y + ax) - \varphi(Y - ax)] , \\ 2ay &= \varphi'(Y - ax) - \psi'(Y + ax) , \end{aligned}$$

où Y figure à titre de paramètre variable. On voit aisément que cette dernière intégrale se transforme en la précédente, par une transformation convenable du paramètre variable.

Prenons, comme nouvel exemple, l'équation de E. Goursat, concernant la transformation des surfaces ²:

$$Xpt + rt - s^2 = 0 , \tag{10}$$

X désignant une fonction quelconque de la variable x .

¹ N. SALTYSKOW, Application des transformations de contact à l'intégration des équations aux dérivées partielles (*Bulletin de l'Académie royale serbe. A. Sciences mathématiques et physiques*, n° 3, Belgrade, 1936, p. 41).

² *American Journal of Mathematics*, vol. XIV, et *Cours d'Analyse*, 4^{me} éd., t. III, Paris, 1927, « Exercices », p. 88. La fonction X y est remplacée par $f'(x)$.

En posant

$$X = \frac{\mathcal{X}'}{\mathcal{X}}, \quad \mathcal{X} = e^{\int X dx},$$

l'équation de E. Goursat (10) devient

$$(\mathcal{X}'p + \mathcal{X}r)t - s \cdot \mathcal{X} \cdot s = 0$$

et peut être écrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial (\mathcal{X}p)}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial (\mathcal{X}p)}{\partial y} = 0.$$

Il s'ensuit l'intégrale intermédiaire :

$$\mathcal{X}p = \varphi(q),$$

φ étant une fonction arbitraire.

Or, cette dernière équation est aux dérivées partielles du premier ordre, les variables étant séparées.

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation (10) devient

$$\begin{aligned} z &= \varphi(C) \Theta(x) + Cy + \psi(C), \\ \varphi'(C) \Theta(x) + y + \psi'(C) &= 0, \end{aligned}$$

ψ désignant la seconde fonction arbitraire, C étant le paramètre variable, et la fonction $\Theta(x)$ s'exprimant en X de la manière suivante :

$$\Theta(x) = \int e^{-\int X dx} dx.$$

La nouvelle équation que nous allons étudier, est celle que M. A. Demoulin a bien voulu me proposer d'intégrer :

$$rt - s^2 + \varphi(z) (p^2t - 2pqs + q^2r) = 0, \quad (11)$$

après en avoir obtenu l'intégrale générale, grâce à des considérations géométriques.

Pour résoudre l'équation proposée, remarquons que l'on a les identités évidentes :

$$\begin{aligned} rt - s^2 &\equiv p \left[\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{p} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q}{p} \right) \right], \\ p^2t - 2pqs + q^2r &\equiv p^2 \left[p \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{p} \right) - q \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q}{p} \right) \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation (11), grâce à la réduction des termes, s'écrit de la manière suivante:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} + \varphi(z) p^2 \right] \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{p} \right) - \left[\frac{\partial p}{\partial y} + \varphi(z) pq \right] \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q}{p} \right) = 0 .$$

Cela étant, divisons par p les expressions qui se trouvent entre crochets, ainsi que le second membre de cette dernière équation, et posons, ensuite,

$$e^{\int \varphi(z) dz} \equiv Z .$$

L'équation étudiée devient alors:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\log p Z) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\log p Z) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q}{p} \right) = 0 .$$

Il s'ensuit l'intégrale de cette dernière équation sous la forme:

$$pZ = f\left(\frac{q}{p}\right) ,$$

f désignant une fonction arbitraire de $\frac{q}{p}$.

Or, cette dernière équation aux dérivées partielles du premier ordre appartient au type des équations de Lagrange, dont l'intégrale complète s'obtient, en joignant l'intégrale des caractéristiques $\frac{q}{p} = C$, C désignant une constante arbitraire.

Il s'en suit, donc, l'intégrale générale de l'équation (11) sous forme de l'ensemble des deux équations:

$$\int e^{\int \varphi(z) dz} dz = f(C) (x + Cy) + \psi(C) ,$$

$$f(C)y + f'(C) (x + Cy) + \psi'(C) = 0 ,$$

f et ψ désignant deux fonctions arbitraires, C étant un paramètre auxiliaire variable.

Il est aisé d'intégrer beaucoup d'autres équations, grâce aux procédés du groupement des termes.

Considérons, de ce fait, les quatre types d'équations suivants :

$$r - t + \varphi(z) (p + q) f(p - q) = 0 , \quad (12)$$

$$r - t + f(x, y, p - q) = 0 , \quad (13)$$

$$r + 2s + t + \varphi(z) f(p + q) = 0 , \quad (14)$$

$$r + 2s + t + f(x, y, p + q) = 0 , \quad (15)$$

les fonctions φ et f admettant des expressions quelconques.

M. A. DEMOULIN m'avait communiqué une méthode directe d'intégration de l'équation (12) dans le cas, où $f(p - q) \equiv p - q$, et de l'équation (14) dans le cas, où $f(p + q) \equiv (p + q)^2$.

Or, pour intégrer l'équation (12), dans l'hypothèse la plus générale, retranchons et ajoutons la variable s au premier membre de l'équation étudiée (12).

Elle pourra, alors, s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{1}{f(p - q)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (p - q) + \frac{\partial}{\partial y} (p - q) \right] + \varphi(z) (p + q) = 0 .$$

En y introduisant les désignations :

$$\int \frac{d(p - q)}{f(p - q)} \equiv \Phi(p - q) , \quad \int \varphi(z) dz \equiv Z ,$$

la dernière équation va devenir :

$$\frac{\partial}{\partial x} [\Phi(p - q) + Z] + \frac{\partial}{\partial y} [\Phi(p - q) + Z] = 0 .$$

L'intégration de l'équation obtenue, linéaire et du premier ordre par rapport aux dérivées partielles de la fonction qui se trouve entre crochets, donne l'intégrale générale première de l'équation (12) :

$$\Phi(p - q) + Z = \Psi(y - x) , \quad (16)$$

Ψ désignant une fonction arbitraire.

Si l'on introduit deux nouvelles variables indépendantes ξ et η liées avec les anciennes par les relations :

$$y - x = \xi , \quad y + x = \eta , \quad (17)$$

l'équation (16) prend la forme d'une équation différentielle ordinaire :

$$\Phi\left(-2 \frac{\partial z}{\partial \xi}\right) + Z = \Psi(\xi) .$$

L'intégration de cette dernière équation dépendra de la forme des fonctions Φ et Z . Son intégrale générale contiendra, au lieu de la constante arbitraire, une fonction arbitraire de la variable η . On en tirera l'intégrale générale de l'équation étudiée (12), au moyen de la transformation inverse des variables.

Quant à l'équation (13), on la mettra, ainsi que la précédente, sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}(p - q) + \frac{\partial}{\partial y}(p - q) + f(x, y, p - q) = 0 . \quad (18)$$

C'est une équation linéaire, par rapport au binôme $p - q$, dont l'intégration dépendra de celle d'une équation différentielle ordinaire formée au moyen de la fonction f . Il restera, enfin, à intégrer une seconde équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, pour en tirer l'intégrale générale de l'équation donnée (13).

Passons à présent aux deux dernières équations (14) et (15).

On écrira aisément l'équation (14) de la manière suivante :

$$\frac{(p + q)}{f(p + q)} \left[\frac{\partial}{\partial x}(p + q) + \frac{\partial}{\partial y}(p + q) \right] + \varphi(z)(p + q) = 0 .$$

Cette dernière équation peut être mise sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} [U(p + q) + Z] + \frac{\partial}{\partial y} [U(p + q) + Z] = 0 \quad (19)$$

où les fonctions U et Z sont définies respectivement par les quadratures :

$$U(p + q) \equiv \int \frac{(p + q) d(p + q)}{f(p + q)} , \quad Z \equiv \int \varphi(z) dz .$$

Cela étant, on obtient, intégrant l'équation (19), l'intégrale générale première de l'équation (14) sous la forme :

$$U(p + q) + Z = \Psi(y + x) , \quad (20)$$

Ψ étant une fonction arbitraire.

La transformation de variables indépendantes, au moyen des formules (17), réduit l'équation (19) à la suivante :

$$U\left(2\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + Z = \Psi(\xi) .$$

L'équation obtenue est aux différentielles ordinaires, dont l'intégration dépend de la forme des fonctions U et Z . L'intégrale générale de cette dernière équation devra impliquer, au lieu d'une constante arbitraire, une nouvelle fonction arbitraire de ξ . On en tirera, au moyen de la transformation inverse des variables, l'intégrale générale de l'équation étudiée (14).

La dernière équation (15) va s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}(p + q) + \frac{\partial}{\partial y}(p + q) + f(x, y, p + q) = 0 .$$

Or, cette dernière équation va être intégrée d'une manière analogue à l'équation (18).

V. — INTÉGRATIONS DE QUELQUES ÉQUATIONS USUELLES DU SECOND ORDRE.

Citons maintenant plusieurs équations, dont l'intégration est exposée dans maints traités de Goursat, de Forsyth, de Piaggio, ainsi que chez d'autres auteurs.

Considérons, en premier lieu, l'équation (GOURSAT, *Cours d'Analyse*, 4^{me} éd., t. III, Paris, 1927. Exercices, p. 88) :

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = 0 . \tag{1}$$

En groupant les termes de cette équation (1), on va l'écrire

$$x \frac{\partial}{\partial x}(xp + yq) + y \frac{\partial}{\partial y}(xp + yq) = xp + yq .$$

L'intégrale générale de cette dernière équation aux dérivées partielles du premier ordre, par rapport au binôme $xp + yq$, se présente sous la forme :

$$xp + yq = xf\left(\frac{y}{x}\right) ,$$

f désignant la fonction arbitraire. L'intégrale générale de cette dernière équation

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

φ étant une seconde fonction arbitraire, représente bien l'intégrale générale de l'équation (1).

L'équation (GOURSAT, *ibid.*):

$$xyr + (x^2 + y^2)s + xyt - yp - xq = 0 \quad (2)$$

s'écrit immédiatement ainsi:

$$y \frac{\partial}{\partial x} (xp + yq - 2z) + x \frac{\partial}{\partial y} (xp + yq - 2z) = 0 .$$

Il s'ensuit, donc, l'intégrale générale requise de l'équation (2)

$$z = (y^2 - x^2) f\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi(y^2 - x^2),$$

f et φ étant les fonctions arbitraires.

L'équation du problème connu d'Ossian Bonnet:

$$x^2r - y^2t = 0 \quad (3)$$

s'écrit aisément de la manière suivante:

$$x \frac{\partial}{\partial x} (xp + yq - z) - y \frac{\partial}{\partial y} (xp + yq - z) = 0 .$$

On a par conséquent l'intégrale générale de l'équation (3) sous la forme:

$$z = f(xy) + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

f et φ désignant deux fonctions arbitraires.

L'équation de J. Bertrand:

$$x^2r + 2xys + y^2t + xp + yq = n^2z \quad (4)$$

qui est intégrable par réduction à un système de Charpit¹, est de

¹ Voir plus haut, p. 145, *loc. cit.*

même intégrable, si l'on va grouper ses termes de la manière suivante :

$$x \frac{\partial}{\partial x} (xp + yq + nz) + y \frac{\partial}{\partial y} (xp + yq + nz) = n(xp + yq + nz) .$$

Il s'ensuit immédiatement l'intégrale générale de l'équation (4) :

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{-n} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) .$$

f et φ étant deux fonctions arbitraires.

Considérons, à présent, l'équation

$$xy^3 r - yx^3 t + x^3 q - y^3 q = 0 , \quad (5)$$

que l'on mettra sous la forme suivante :

$$y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{x} + \frac{q}{y} \right) - x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{x} + \frac{q}{y} \right) = 0 .$$

Il s'ensuit donc que les deux fonctions, $x^2 + y^2$ et $\frac{p}{x} + \frac{q}{y}$ sont liées par une relation arbitraire que l'on écrira

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = 2f'(x^2 + y^2) ,$$

f' désignant une fonction arbitraire. En intégrant cette dernière équation, on obtiendra l'intégrale générale de (5)

$$z = f(x^2 + y^2) + \varphi(x^2 - y^2) ,$$

f et φ étant deux fonctions arbitraires.

Considérons, enfin, l'équation (Forsyth, Piaggio)

$$r + y = t + x . \quad (6)$$

Il est aisé de l'écrire en groupant ses termes de deux manières différentes :

$$r \pm s - x \mp (s \pm t \mp y) = 0 ,$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p \pm q - \frac{x^2 \pm y^2}{2} \right) \mp \frac{\partial}{\partial y} \left(p \pm q - \frac{x^2 \pm y^2}{2} \right) = 0 ,$$

en prenant respectivement, soit les signes supérieurs, soit les inférieurs.

L'intégration de ces deux équations aux dérivées partielles du premier ordre produit respectivement deux intégrales premières :

$$p + q = \frac{x^2 + y^2}{2} + 2f'(x + y) ,$$

$$p - q = \frac{x^2 - y^2}{2} + 2\varphi'(x - y) ,$$

f' et φ' désignant les dérivées de deux fonctions arbitraires f et φ , le facteur 2 étant introduit pour simplifier les formules qui vont suivre.

Ces deux dernières formules donnent les valeurs des dérivées :

$$p = \frac{x^2}{2} + f' + \varphi' , \quad q = \frac{y^2}{2} + f' - \varphi' .$$

Il s'ensuit, par quadrature, l'intégrale générale de l'équation donnée (6) :

$$z = \frac{x^3 + y^3}{6} + f(x + y) + \varphi(x - y) ,$$

à deux fonctions arbitraires f et φ .

Citons encore trois équations du second ordre, dont les coefficients dépendent des dérivées partielles du premier ordre de la fonction inconnue :

$$z(r - t) = p^2 - q^2 , \quad (7)$$

$$q^2 r - p^2 t = 0 , \quad (8)$$

$$(1 + pq + q^2)r + (q^2 - p^2)s - (1 + p^2 + pq)t = 0 . \quad (9)$$

L'équation (7) (v. FORSYTH, v. VI, p. 219. Ex. 2) appartient bien au type d'équations (12) citées dans la partie V du présent Mémoire, équations que M. A. Demoulin avait intégrées.

Or, la même équation (7) pourrait être mise, d'une autre manière, sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p + q}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p + q}{z} \right) = 0 .$$

En intégrant cette dernière équation, on obtient l'intégrale générale de l'équation (7):

$$z = f(x + y) \cdot \varphi(x - y) ,$$

f et φ étant deux fonctions arbitraires.

Quant à l'équation (8), elle va s'écrire

$$\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (pq) - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (pq) = 0 .$$

Il s'ensuit donc

$$pq = f(z) ,$$

f désignant une fonction arbitraire. L'intégrale complète de cette dernière équation s'obtient, d'après Lagrange, en ajoutant l'intégrale des caractéristiques

$$\frac{p}{q} = C ,$$

C étant une constante arbitraire. Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation (8) se représente par l'ensemble des deux équations suivantes:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} = \sqrt{C} x + \frac{1}{\sqrt{C}} y + \varphi(C) ,$$

$$\frac{x}{2\sqrt{C}} - \frac{y}{2\sqrt{C^3}} + \varphi'(C) = 0 ,$$

φ désignant la seconde fonction arbitraire, C jouant le rôle d'un paramètre variable.

Enfin, la dernière équation (9) citée dans le *Traité d'Analyse* de LACROIX, 2^{me} éd., t. II, p. 586, n^o 755, va s'écrire

$$[1 + q(p + q)] \frac{\partial}{\partial x} (p + q) - [1 + p(p + q)] \frac{\partial}{\partial y} (p + q) = 0 .$$

Cette dernière équation se met aisément sous la forme nouvelle:

$$\frac{\partial}{\partial y} [x + y + z(p + q)] \frac{\partial}{\partial x} (p + q) - \frac{\partial}{\partial x} [x + y + z(p + q)] \frac{\partial}{\partial y} (p + q) = 0$$

dont l'intégrale devient :

$$x + y + z(p + q) = f(p + q) , \quad (10)$$

f désignant une fonction arbitraire. Pour intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (10), posons

$$p + q = x_1 . \quad (11)$$

L'intégrale complète de cette dernière équation (11), en y considérant x_1 comme une constante, devient :

$$z = (x_1 - y_1)x + y_1 y + z_1 ,$$

y_1 et z_1 désignant deux nouvelles constantes arbitraires. Si l'on prend cette dernière relation, comme la formule fondamentale de la transformation de contact¹, l'équation (10) transformée prend la forme suivante, en considérant z , comme nouvelle fonction inconnue de nouvelles variables indépendantes x_1 et y_1 :

$$(x_1^2 + 2) p_1 + (x_1 y_1 + 1) q_1 = x_1 z_1 - f(x_1) ,$$

p_1 et q_1 désignant respectivement les nouvelles dérivées $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial z_1}{\partial y_1}$. L'intégrale générale de cette dernière équation admet la forme évidente :

$$z_1 = \sqrt{x_1^2 + 2} \left\{ \int \frac{f(x_1) dx_1}{(x_1^2 + 2)^{3/2}} + \varphi \left[\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + 2}} + \int \frac{dx_1}{(x_1^2 + 2)^{3/2}} \right] \right\} ,$$

φ désignant la seconde fonction arbitraire.

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation primitive (9) s'obtient au moyen de la transformation inverse des variables.

VI. — GÉNÉRALISATION DES MÉTHODES EXPOSÉES.

Euler, en inaugurant les méthodes d'intégration que nous étudions, avait montré, en même temps, comme on pouvait

¹ N. SALTYSKOW, Application des transformations de contact à l'intégration des équations aux dérivées partielles (*Bulletin de l'Académie des Sciences math. et natur.* A. Sc. math., n° 3, Belgrade, 1936, p. 41).

étendre leurs applications, en commençant par l'intégration des plus simples équations pour passer, ensuite, à celles plus compliquées. Comme excellent exemple, sous ce rapport, on pourrait reprendre le problème de la corde vibrante à densité variable. Dans ce but, EULER¹ considère l'équation :

$$t - P^2 r = 0 , \quad (1)$$

P désignant une fonction des variables x et y vérifiant la condition :

$$\frac{\partial P}{\partial y} - P \frac{\partial P}{\partial x} = 0 . \quad (2)$$

L'équation (1), grâce à cette dernière hypothèse (2), se réduit immédiatement à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\frac{\partial U}{\partial y} - P \frac{\partial U}{\partial x} = 0 , \quad (3)$$

où l'on a posé :

$$\frac{\partial z}{\partial y} + P \frac{\partial z}{\partial x} = U . \quad (4)$$

Ce qui est fort important, c'est que l'intégration du problème considéré, dans l'hypothèse (2), peut être poussée jusqu'aux quadratures.

En effet, l'ensemble d'équations (2) et (3) représente un système de Charpit². Formons, pour définir les fonctions P et U, le système correspondant d'équations différentielles ordinaires :

$$dy = \frac{dx}{-P} = \frac{dP}{0} = \frac{dU}{0} .$$

Ce dernier système admet trois intégrales distinctes suivantes :

$$P = C_1 , \quad U = C_2 , \quad x + Py = C_3 ,$$

¹ *Institutiones Calculi Integralis*, V, III, p. 193, probl. 49.

² Voir plus haut, p. 145, *loc. cit.*

C_1 , C_2 et C_3 désignant trois constantes arbitraires. Cela étant, l'intégrale générale du système de Charpit (2) — (3) devient:

$$P = \varphi(\omega) , \quad U = \psi(\omega) , \quad (5)$$

$$\omega = x + \varphi(\omega)y \quad (6)$$

φ et ψ désignant deux fonctions arbitraires.

Intégrons, à présent, l'équation (4), en y substituant les expressions (5) de P et de U . Transformons de plus l'équation (4), en introduisant comme nouvelle variable indépendante ω , au lieu de x . L'équation (4) transformée devient:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{2\varphi}{1 - y\varphi'} \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} = \psi , \quad (7)$$

Θ désignant l'expression de la fonction inconnue z qui est exprimée en nouvelles variables.

L'intégration de cette dernière équation linéaire (7) produit l'intégrale générale de l'équation donnée (1) sous la forme suivante:

$$z = \left(\int \frac{d\omega}{2\sqrt{\varphi}} - y\sqrt{\varphi} \right) \int \frac{\psi d\varphi}{2\varphi^{3/2}} + \\ + \int \left(1 - \frac{\varphi'}{2\sqrt{\varphi}} \int \frac{d\omega}{\sqrt{\varphi}} \right) \frac{\psi d\omega}{2\varphi} + f \left(y\sqrt{\varphi} - \int \frac{d\omega}{2\sqrt{\varphi}} \right) ,$$

où ψ et f désignent deux fonctions arbitraires, ω étant le paramètre variable défini par la relation (6); quant à la fonction arbitraire φ , elle définit la valeur du coefficient P de l'équation donnée (1).

EULER¹ donne, comme second exemple, l'équation:

$$t - Pr + Qq + \left(PQ + \frac{\partial P}{\partial y} - P \frac{\partial P}{\partial x} \right) p = 0 , \quad (8)$$

P et Q désignant des fonctions quelconques de x et de y .

On met aisément l'équation considérée (8) sous la forme suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial y} - P \frac{\partial U}{\partial x} + QU = 0 , \quad (9)$$

¹ *Ibid.*, p. 202, probl. 50.

en posant

$$\frac{\partial z}{\partial y} + P \frac{\partial z}{\partial x} = U . \quad (10)$$

Le problème de l'intégration de l'équation donnée (8) revient donc à celle de l'équation (9) pour définir, d'abord, la valeur de la fonction U et, ensuite, à l'intégration de l'équation (10) qui donne l'intégrale générale requise.

Les problèmes cités représentent une introduction à l'œuvre de Legendre sur l'intégration d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue, dont les coefficients ne dépendent que des variables indépendantes. Cette dernière théorie est une généralisation de l'élégante méthode de Laplace pour intégrer les équations hyperboliques. On sait maintenant que toutes ces recherches simplifient et unifient, en même temps, la méthode de G. Monge et celle de G. Darboux intégrant les équations linéaires en question ¹.

Il se pose donc, à présent, un nouveau problème de généralisation concernant la recherche d'une méthode qui suppléerait celles de G. Monge et de G. Darboux pour les équations linéaires de la forme générale.

¹ N. SALTYKOW, Note sur la méthode de Legendre pour intégrer les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre (*Travaux du Deuxième Congrès des Mathématiciens slaves*. Prague, septembre 1934).

N. SALTYKOW, Théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue (*Bulletin de l'Acad. des Sc. math. et natur. A. Sciences mathématiques et physiques*, n° 2. Belgrade, 1935).