

Courbes définies par une relation entre OT et OM.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Elle est réduite au type classique

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = k\xi^m$$

$$m = -\frac{4N}{2N+1}$$

N étant entier (N = 1). Le changement de variable

$$\xi = At^{\frac{2}{m+2}}, \quad A^{m+2} = -\frac{(m+2)^2}{4k},$$

$$\eta = \frac{1}{u} \frac{du}{d\xi},$$

la transforme en l'équation de BESSEL:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2n+1}{t} \frac{du}{dt} + u = 0;$$

on est dans le cas d'intégration des fonctions de BESSEL d'indice

$$n = -\frac{3}{2},$$

$$k = -1, \quad A = \frac{1}{27}.$$

4. — A signaler aussi, un cas d'intégration

$$y^m = \operatorname{tg} V, \quad m = \text{const.}$$

par séparation des variables:

$$r^{m-1} dr = \sin^{-m} \theta \cdot d\theta.$$

Courbes définies par une relation entre OT et OM.

5. — Soit T la trace sur l'axe Ox de la tangente en M à une courbe. La condition

$$\lambda = OT = f(r),$$

entre la coordonnée axiale $\lambda = x - y \frac{dx}{dy}$ et le rayon vecteur $r = OM$, devient

$$r^2 \frac{d\theta}{dy} = f(r),$$

$$\frac{dx}{x-f} = \frac{dr}{r - \frac{x}{r}f}.$$

En posant

$$x = \frac{r^2}{f} - \frac{1}{z} ,$$

l'équation prend la forme:

$$\frac{dz}{dr} = r \left(\frac{r^2}{f^2} - 1 \right) \cdot z^2 (z + P) ,$$

$$P = \frac{rf' - 3f}{r^2 - f^2} , \quad f' = \frac{df}{dr} .$$

Il y a séparation des variables, pour P constant.

Pour $P = 0$, il suffit de prendre $f = r^3$:

$$\frac{1}{z^2} = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2a ,$$

d'où la courbe:

$$r^2 \sin^2 \theta = 2(a - \cos \theta) ,$$

$$y^2 = 2(a - \cos \theta) ,$$

circulaire, du sixième degré.

Le cas de P constant correspond aux intégrales $f(r)$ d'une équation de Riccati

$$r \frac{df}{dr} = 3f + P(r^2 - f^2) .$$

En posant alors

$$r = \frac{1}{PX} , \quad f = \frac{1}{P} \cdot \frac{Y}{X^3} ,$$

l'équation de Riccati prend la forme canonique

$$\boxed{\frac{dY}{dX} = -1 + \frac{Y^2}{X^4} .}$$

Il y a lieu d'observer que le changement de variables

$$Y = -iY_1 , \quad X = iX_1 ,$$

lui donne la forme

$$\frac{dY_1}{dX_1} = 1 + \frac{Y_1^2}{X_1^4} ,$$

obtenue plus haut pour l'équation correspondante de séparation des variables dans le problème de l'isochrone paracentrique; la transformation

$$X_1 = \frac{1}{3} \xi^{-\frac{1}{3}}, \quad Y_1 = \frac{1}{9} \eta,$$

donne l'équation

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \xi^{-\frac{4}{3}},$$

intégrable par les fonctions de BESSEL d'indice $-\frac{3}{2}$.

6. — Un autre cas d'intégration est celui des courbes définies par la condition:

$$OT = k \cdot OM.$$

L'équation correspondante

$$\frac{dr}{r - kx} = \frac{dx}{x - kr},$$

est homogène. Elle devient

$$k \frac{dr}{r} = \frac{1 - k \cos \theta}{\sin \theta} d\theta.$$

D'où:

$$y = \operatorname{tang}^{\frac{1}{k}} \frac{\theta}{2},$$

$$r \sin \theta = \operatorname{tang}^{\frac{1}{k}} \frac{\theta}{2},$$

$$2x = y(y^{-k} - y^k).$$

Ces courbes sont identiques aux *images d'Aoust des courbes ordinaires de poursuite*.