

# RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE

Autor(en): **Zaremba, S.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515774>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# RÉFLEXIONS SUR LES FONDEMENTS DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE <sup>1</sup>

PAR

S. ZAREMBA (Cracovie).

---

Le sujet du présent article est un peu démodé car actuellement, on est plutôt porté à envisager la Mécanique relativiste selon les vues de M. EINSTEIN. Mais il convient de remarquer que, même si les conceptions de M. EINSTEIN devaient définitivement triompher, il arriverait, de l'aveu des relativistes eux-mêmes, que, dans les applications, la différence entre les résultats de la Mécanique classique et ceux de la Mécanique relativiste serait presque toujours ou bien imperceptible ou que la différence en question serait à la limite de ce qui pourrait être observé. C'est ce qui a fait écrire à notre maître à tous, Henri Poincaré, que l'étude de la Mécanique classique ne cessera jamais d'être utile. J'ose donc espérer que les considérations que je vais esquisser présenteront quelque utilité.

Tout d'abord, il est indispensable de nous occuper de la notion de *temps*.

Il est bien connu que, dans toute théorie déductive, il y a nécessairement des termes, dits *termes primitifs*, introduits sans définition, ainsi que des propositions admises sans démonstration, dénommées *postulats*, *hypothèses* ou *axiomes*.

Dans la théorie que j'ai en vue, nous introduirons, à titre de terme primitif, le terme « *instant* » et nous admettrons tout d'abord le postulat suivant:

---

<sup>1</sup> Conférence faite à la Faculté des Sciences de l'Université d'Aix-Marseille le 15 décembre 1938.

I. POSTULAT. — *Etant donné deux instants déterminés  $J_1$  et  $J_2$ , l'une des deux éventualités suivantes sera toujours vérifiée: ou bien les deux instants considérés se confondront ou bien un certain de ces deux instants sera antérieur à l'autre ou, si l'on veut, le précédera.*

En adoptant le postulat précédent, nous avons par cela même rejeté la théorie de la relativité de M. Einstein car, selon cette théorie, la question de savoir quel est celui de deux instants donnés qui précède le second, ou si ces deux instants se confondent, dépend du mode de repérage des instants et de l'espace.

En dehors du postulat énoncé plus haut, nous admettrons encore le suivant.

II. POSTULAT. — *Il est possible d'établir une correspondance biunivoque entre les éléments de l'ensemble des instants et ceux de l'ensemble des nombres réels de telle façon qu'à tout instant antérieur à un autre instant, corresponde un nombre réel inférieur à celui qui correspond au second instant.*

Nous appellerons *temps* l'ensemble de tous les instants et nous dirons qu'une correspondance de la nature susdite entre les instants et les nombres réels, appelés images arithmétiques des instants correspondants, constitue une représentation arithmétique du temps.

Il est aisé de démontrer qu'il existe une infinité de représentations arithmétiques du temps, mais il n'existe qu'une classe très étroite de représentations arithmétiques du temps appropriées aux besoins de la Science et que nous appellerons représentations *normales* du temps.

Pour définir les représentations normales du temps, de nouveaux termes primitifs et de nouveaux postulats sont nécessaires.

Nous introduirons d'abord comme terme primitif l'expression *point matériel*.

III. POSTULAT. — *Nous admettrons qu'à chaque instant un point matériel déterminé a une position déterminée dans l'espace et que, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes, celle-ci peut être déterminée par ses trois coordonnées.*

Il nous faut encore introduire à titre de nouveau terme primitif

le terme *force*. Selon les idées généralement reçues dans les exposés théoriques de la mécanique, une force est un élément qui admet pour image mathématique adéquate un vecteur qui a pour origine le point d'application de la force, dont la longueur a pour mesure le nombre qui représente l'intensité de la force et qui, lorsque l'intensité de la force n'est pas nulle, a le sens de la force. En réalité la conception précédente de la notion de force est insuffisante et si l'on étudie avec quelque attention les applications de la mécanique, par exemple à la théorie de l'élasticité, on constate que l'on y envisage implicitement des forces qui ont une infinité de points d'application. En nous réservant de revenir sur cette question un peu plus tard, nous nous bornerons pour le moment à dire qu'il existe deux espèces de forces, à savoir des *forces concentrées*, représentables de la façon usuelle par des vecteurs, et des *forces non concentrées* ou *disséminées*.

Pour éviter des complications inutiles, nous supposerons toujours, à moins de spécifier explicitement le contraire, que les positions successives des points matériels ou plus généralement de corps matériels quelconques, sont rapportées à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires que nous nommerons *système de référence*.

Voici maintenant le postulat qui nous permettra de définir les *représentations normales* du temps.

IV. POSTULAT. — *Il existe une classe particulière de systèmes de référence, appelés systèmes de référence galiléens et une classe particulière de représentations arithmétiques du temps, dites représentation normale du temps tels que si l'on adopte une représentation normale du temps et si l'on admet qu'un point matériel quelconque ne soit sollicité par aucune force, alors, par rapport à n'importe quel système de référence galiléen, le point matériel considéré, à moins d'être fixe, sera animé d'un mouvement rectiligne uniforme.*

Cela posé, voici les deux théorèmes fondamentaux qu'il est aisé de démontrer.

V. THÉORÈME. — *Si l'on désigne d'une façon générale par  $t$  et  $\mathfrak{T}$  les images arithmétiques d'un même instant dans deux représenta-*

tions normales du temps, les variables  $t$  et  $\mathcal{T}$  satisfont à une équation de la forme suivante :

$$t = a \cdot \mathcal{T} + b$$

où  $a$  est une constante supérieure à zéro pouvant avoir, à cette condition près, n'importe quelle valeur, et  $b$  une constante réelle pouvant avoir une valeur tout à fait quelconque.

VI. THÉORÈME. — Une représentation normale du temps étant adoptée, si l'on envisage deux systèmes de référence galiléens quelconques, ces deux systèmes sont ou bien liés l'un à l'autre d'une façon invariable ou chacun d'eux se déplace par rapport à l'autre d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme.

Dans les traités traditionnels de Mécanique rationnelle, on s'exprime ordinairement comme si l'on admettait l'existence du repos absolu, ce qui serait incompréhensible. Mais en réalité on a en vue un système de référence par rapport auquel l'ensemble des étoiles semble être fixe. Cette façon de présenter les choses est d'autant plus défectueuse qu'à strictement parler, un tel système de référence n'existe pas. En adoptant au contraire la théorie que je viens d'exposer, il est aisé de présenter les choses avec logique et clarté. On pourra affirmer qu'un système de coordonnées ayant pour origine le centre du Soleil et, pour axes, des axes définis au moyen de deux étoiles convenablement choisies est, avec un degré d'approximation satisfaisant, l'un des systèmes de référence galiléens et que ce que l'on appelle « temps solaire moyen » constitue, avec un degré d'approximation suffisant, une *représentation normale* du temps.

Actuellement, nous avons à compléter la notion de force *non concentrée*<sup>1</sup> ou *disséminée* que nous n'avons fait qu'effleurer à la page 61. Dans ce qui va suivre, nous devons nous appuyer sur la statique classique du corps rigide, c'est-à-dire sur la théorie de l'équilibre du corps rigide libre sollicité par un nombre fini de forces concentrées et, plus généralement, sur la théorie de l'équivalence de deux systèmes finis de forces par rapport à

<sup>1</sup> J'ai présenté pour la première fois la notion de *force non concentrée* dans une brève communication faite au *Congrès international des Mathématiciens* tenu à Zurich en 1932; depuis j'ai développé cette notion dans l'article *Sur la notion de force en Mécanique* paru en 1934 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, à la page 110.

un corps rigide libre. Naturellement je regarderai la théorie précédente comme acquise. Toutefois, je me permettrai de dire que la méthode proposée par DARBOUX <sup>1</sup>, avec la simplification due à M. PICARD <sup>2</sup>, se prête à une exposition particulièrement simple et instructive de la statique classique du corps rigide.

Revenant à la théorie des forces disséminées, nous adopterons les définitions suivantes :

VII. DÉFINITION. — *L'assertion qu'un système S d'un nombre fini de forces dont chacune pourrait être soit une force concentrée soit une force disséminée, est, à un instant déterminé  $t_0$ , statiquement équivalent à zéro, exprime que si, à partir de l'instant  $t_0$ , le système de forces S, à l'état où il se trouve à cet instant, était appliqué à un corps rigide (C) libre, au repos par rapport à un système de référence galiléen à l'instant considéré, le corps (C) continuerait à rester au repos par rapport au système de référence susdit.*

VIII. DÉFINITION. — *L'assertion que deux systèmes de forces  $S_1$  et  $S_2$  de la nature considérée dans la définition précédente, sont, à un instant  $t_0$ , statiquement équivalents entre eux, exprime qu'il existe un système fini  $S_0$  de forces concentrées tel que le résultat de l'adjonction du système de forces  $S_0$  à l'époque  $t_0$ , à n'importe lequel des systèmes  $S_1$  ou  $S_2$ , détermine un système statiquement équivalent à zéro.*

Cela posé, nous adopterons le postulat suivant :

IX. POSTULAT. — *A chaque instant il correspond à une force disséminée F un système fini de forces concentrées S statiquement équivalent à la force F.*

Actuellement, nous avons à faire connaître un procédé propre à définir mathématiquement une force disséminée.

En vue des applications, il suffira de distinguer trois cas selon que l'ensemble des points d'application d'une force disséminée remplit un volume, une surface ou une ligne. Il y a une analogie

<sup>1</sup> Note I de DARBOUX dans le T. I de l'ouvrage suivant : M. DESPEYROUS, *Cours de Mécanique*, Paris, 1884, chez A. Hermann.

<sup>2</sup> L'équation  $f(x) + f(y) = f(x + y)$  et le problème de la composition des forces, p. 4 dans l'ouvrage suivant : E. PICARD, *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*, Paris, 1928, chez Gauthier-Villars.

si grande entre les méthodes à employer dans ces trois cas, que nous pourrions nous borner à envisager le premier. Nous supposons que l'ensemble des points d'application d'une force disséminée  $F$  constitue un domaine borné  $(D)$  mesurable au sens de Jordan.

Désignons par  $A$  l'un quelconque des points d'application de la force  $F$  et soit  $(\Sigma)$  une surface fermée comprenant à son intérieur le point  $A$  et limitant un volume simplement connexe  $\nu$  mesurable d'après Jordan. A l'ensemble de ceux des points d'application de la force  $F$  qui font partie du volume  $\nu$ , correspondra une certaine partie de la force  $F$  qui sera elle-même une force disséminée  $F(\nu)$ . En vertu du postulat IX énoncé plus haut, il existera un système fini de forces concentrées statiquement équivalent à la force  $F(\nu)$ . Ce système de forces concentrées pourra toujours être considéré comme l'ensemble d'une force concentrée, représentée par un vecteur  $\Phi_{\Sigma}$  ayant le point  $A$  pour point d'application, et d'un couple représenté par un vecteur  $M_{\Sigma}$ . Soit maintenant  $\delta$  la borne supérieure de la distance d'un point du volume  $\nu$  au point  $A$ . Supposons que l'on puisse définir les vecteurs  $F_A$  et  $M_A$  au moyen des équations suivantes

$$F_A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Phi_{\Sigma}}{\nu} \quad (1)$$

et

$$M_A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{M_{\Sigma}}{\nu} \quad (2)$$

Nous dirons que les vecteurs  $F_A$  et  $M_A$  représentent respectivement la *tension* et le *moment* de la force disséminée  $F$  en  $A$ , rapportés à l'unité de volume.

Il est aisé de prouver que, à une époque donnée  $t_0$ , une force disséminée  $F$  dont les points d'application remplissent un certain volume, sera parfaitement déterminée si, à l'époque considérée, en chaque point d'application  $A$  de cette force, la tension  $F_A$  et le moment  $M_A$  de celle-ci, rapportés à l'unité de volume, sont donnés. En réalité, au point de vue des applications, une force disséminée  $F$  serait suffisamment déterminée, à une époque  $t_0$ ,

même au cas où, en certains points d'application de la force considérée, les fonctions  $F_A$  et  $M_A$  ne seraient pas déterminées à l'époque  $t_0$ , pourvu que l'ensemble de ces points exceptionnels soit de mesure nulle et que, ailleurs, les fonctions  $F_A$  et  $M_A$  satisfassent à certaines conditions de régularité.

Il est très utile de convenir que, si, à une époque  $t_0$ , un système  $S$  de forces pouvant contenir des forces disséminées est statiquement équivalent à un système fini  $\Phi$  de forces concentrées, alors les sommes des projections orthogonales sur les axes d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires ( $\mathcal{R}$ ) et les sommes des moments de ces forces par rapport aux axes du système ( $\mathcal{R}$ ), représentent respectivement les projections rectangulaires du système de forces  $S$  sur les axes du système de coordonnées considéré et les moments de ce système de forces par rapport à ces axes. Les quantités relatives au système  $\Phi$  de forces concentrées que nous venons de considérer, se dénomment quelquefois coordonnées *pluckériennes* du système de forces  $\Phi$  par rapport au système de coordonnées ( $\mathcal{R}$ ). Il est naturel d'appeler, comme nous le ferons, *coordonnées pluckériennes du système de forces  $S$*  par rapport au système de coordonnées ( $\mathcal{R}$ ), les quantités de ce nom relatives au système de forces désigné plus haut par  $\Phi$ .

Considérons une force disséminée  $F$  dont les points d'application constituent un certain domaine ( $D$ ) et après avoir rapporté la force  $F$  à un certain système ( $\mathcal{R}$ ) de coordonnées cartésiennes rectangulaires désignons :

par  $x, y, z$  les coordonnées d'un point  $A$  appartenant au domaine ( $D$ ),

par  $F_x(A), F_y(A), F_z(A)$  les projections rectangulaires sur les axes du système ( $\mathcal{R}$ ) de la tension en  $A$  de la force  $F$  rapportée à l'unité de volume,

par  $M_x(A), M_y(A), M_z(A)$  les projections rectangulaires sur les axes du système ( $\mathcal{R}$ ) du moment de la force  $F$  en  $A$ , rapportée à l'unité de volume.

Dans ces conditions, on aura pour les coordonnées plucké-



riennes de la force  $F$  par rapport au système de coordonnées  $(\mathcal{R})$  les formules suivantes :

$$F_x = \int \int \int_{(D)} F_x(A) dx dy dz ,$$

$$F_y = \int \int \int_{(D)} F_y(A) dx dy dz ,$$

$$F_z = \int \int \int_{(D)} F_z(A) dx dy dz ,$$

$$M_x = \int \int \int_{(D)} \{ F_z(A) y - F_y(A) z \} dx dy dz + \int \int \int_{(D)} M_x(A) dx dy dz ,$$

$$M_y = \int \int \int_{(D)} \{ F_x(A) z - F_z(A) x \} dx dy dz + \int \int \int_{(D)} M_y(A) dx dy dz ,$$

$$M_z = \int \int \int_{(D)} \{ F_y(A) x - F_x(A) y \} dx dy dz + \int \int \int_{(D)} M_z(A) dx dy dz .$$

Indiquons rapidement au moins deux applications de la théorie que nous venons d'exposer brièvement.

Considérons, en premier lieu, un corps pesant  $C$  dans un voisinage assez restreint d'un point déterminé  $P$  à la surface de la Terre. On constatera que la gravité du corps  $C$  se manifeste comme une force disséminée  $F$  dont l'ensemble des points d'application coïncide avec l'ensemble des points du corps  $C$ , le moment rapporté à l'unité de volume de la force  $F$  étant nul en chaque point du corps considéré et la tension rapportée à l'unité de volume de la force en question étant représentée par un vecteur de même sens qu'un certain axe passant par le point  $P$ , axe dont on caractérise le sens en disant qu'il est dirigé verticalement de haut en bas.

Comme second exemple envisageons un corps aimanté  $M$  situé dans un champ magnétique. L'effet du champ magnétique sur l'aimant  $M$  se manifestera comme une force disséminée  $F$  dont l'ensemble des points d'application coïncidera avec l'ensemble des points de l'aimant considéré, le moment et la tension de la force  $F$  en un point de l'aimant, rapportés à l'unité de volume, étant en général des vecteurs non nuls.

Il est peut-être intéressant de faire remarquer que notre théorie des forces disséminées fait concevoir *a priori* des forces de la nature de celles qui se présentent dans les phénomènes électromagnétiques.

Pour terminer l'aperçu très succinct que je me proposais de présenter, je vais m'occuper du *Principe de d'Alembert* et de la notion de *masse* pour les corps matériels continus. Actuellement, comme dans la théorie des forces disséminées, nous aurions à distinguer trois cas selon que le corps continu considéré aurait un volume non nul ou qu'il se réduirait soit à une surface soit à une ligne. Je crois toutefois que je pourrai faire comprendre clairement les idées que j'ai en vue en me bornant à envisager un corps matériel  $C$  de volume non nul. Le corps  $C$  pourra être soit un solide rigide, soit un corps pouvant se déformer dans le cours du temps, mais nous supposerons qu'à chaque instant le volume du corps considéré sera mesurable au sens de Jordan. Nous admettrons que tout point physique du corps  $C$  conserve son identité dans le cours du temps.

D'après cela, si l'on désigne par  $P'$  un point physique du corps  $C$  à une époque  $t'$  ainsi qu'un point physique  $P''$  du corps considéré à une autre époque  $t''$ , alors de deux choses l'une: ou bien les points  $P'$  et  $P''$  représenteront deux positions d'un même point physique du corps  $C$  ou bien ces points seront des positions de deux points physiques différents du corps considéré.

Cela posé, voici le postulat qui constitue le principe de d'Alembert pour un corps de la nature indiquée plus haut.

PRINCIPE DE D'ALEMBERT POUR UN CORPS MATÉRIEL DE TROIS DIMENSIONS. — *Etant donné un corps matériel (C) dont à chaque instant le volume est mesurable au sens de Jordan et que nous supposerons être rapporté à un système de référence galiléen ( $\mathcal{R}$ ), il existera une fonction  $\rho$  prenant à chaque instant une valeur non négative parfaitement déterminée en chaque point physique  $P$  du corps  $C$ . La fonction  $\rho$  sera donc une fonction de l'époque  $t$  à laquelle le point  $P$  sera considéré ainsi que des trois variables définissant le point physique  $P$ ; on pourra se représenter en particulier, comme nous le ferons, ces trois variables comme les coordonnées  $x_0, y_0, z_0$  du point  $P$  à une certaine époque particulière. Dans ces*

conditions les coordonnées du point  $P$  seront, comme la fonction  $\rho$ , des fonctions des variables  $x_0, y_0, z_0$  et de l'époque  $t$  à laquelle on envisagera le point  $P$ . Cela posé, la fonction  $\rho$  sera supposée jouir des propriétés suivantes :

1° Si, à une époque quelconque  $t$ , on étend l'intégrale

$$\int \int \int \rho \, dx \, dy \, dz$$

à un ensemble déterminé et mesurable de points physiques du corps  $C$ , cette intégrale aura une valeur indépendante de l'époque considérée  $t$ .

2° Si l'on désigne par  $J$  une force disséminée dont l'ensemble des points d'application coïnciderait avec l'ensemble des points physiques du corps  $C$ , dont le moment rapporté à l'unité de volume est constamment nul en chaque point du corps  $C$  et dont la tension rapportée à l'unité de volume en tout point  $P$  du corps  $C$  serait, à toute époque  $t$ , représentée par le vecteur

$$- w \rho$$

où  $w$  représente l'accélération du point  $P$  à l'époque  $t$  par rapport au système de référence  $(\mathcal{R})$ , la fonction  $\rho$  ayant la valeur qu'elle a au point  $P$  à l'époque considérée, alors pour toute partie  $C'$  du corps  $C$ , pouvant d'ailleurs coïncider avec le corps  $C$  lui-même, le système de forces formé par l'ensemble de toutes les forces et réactions sollicitant le corps  $C'$  constituerait, après y avoir adjoint la portion de la force  $J$  qui correspondrait à la partie  $C'$  du corps  $C$ , un système de forces statiquement équivalent à zéro.

La fonction  $\rho$  représente sous une forme précise ce que l'on appelle ordinairement, sans définition bien nette, la *densité du corps*  $C$  et nous donnerons à la force  $J$  le nom de *force d'inertie du corps considéré*.

Le principe de d'Alembert tel que nous venons de l'énoncer, n'est valable qu'au cas où les fonctions que l'on a à y considérer satisfont à certaines conditions de régularité. Toutefois, moyennant quelques postulats additionnels, on peut étendre le principe de d'Alembert à des cas plus généraux.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que, pour ne pas trop allonger l'exposé précédent, nous avons supprimé les énoncés des postulats qui, quoique indispensables au développement des démonstrations complètes des théorèmes de la théorie, se présentent si naturellement à l'esprit qu'en supprimant ces énoncés nous ne croyons pas avoir nui à la clarté de l'exposition. J'ajoute que j'ai appliqué les idées esquissées dans le présent article avec tous les détails nécessaires dans le *Traité de Mécanique rationnelle* que je publie actuellement en langue polonaise.

SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES  
PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES  
NON INTÉGRABLES

PAR

E. TURRIÈRE (Montpellier).

Les équations du type

$$\frac{dy}{dx} + a_0 y^3 + 3 a_1 y^2 + 3 a_2 y + a_3 = 0$$

ont été étudiées par R. LIOUVILLE et par P. APPELL<sup>1</sup>. La présente note concerne diverses courbes dont la détermination dépend d'équations de cette forme.

**L'isochrone paracentrique.**

1. — En premier lieu, considérons l'isochrone paracentrique<sup>2</sup> qui, historiquement, est la première courbe définie par une équation différentielle dont l'intégration, impossible dans le cas général, tint en échec les fondateurs de l'analyse.

<sup>1</sup> P. APPELL, Sur les invariants de quelques équations différentielles. *Journal de mathématiques pures et appliquées* [4], t. V, 1889, p. 361-423.

<sup>2</sup> GOMES TEIXEIRA, *Traité des courbes spéciales remarquables planes ou gauches*, t. II, p. 50-55.