

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CONTRIBUTION À LA CLASSIFICATION DES TRANSFORMATIONS  
CORRÉLATIVES RÉGULIÈRES DANS UN PLAN ET DANS UN  
ESPACE À TROIS DIMENSIONS

**Autor:** Vyichlo, F.  
**Kapitel:** 2. — La classification des corrélations planes.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28594>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

C'est-à-dire

$$(\rho - 1) \cdot A \cdot {}^1x = \bar{A} \cdot {}^1x .$$

De même

$${}^1x = A^{-1} \cdot {}^2\xi , \quad \rho \cdot {}^1x = (A^{-1} + \bar{A}^{-1}) \cdot {}^2\xi ,$$

ou

$$(\rho - 1) \cdot A^{-1} \cdot {}^2\xi = \bar{A}^{-1} \cdot {}^2\xi .$$

THÉORÈME 12. — Au point singulier de la quadrique  $K_1$  correspond involutivement le plan qui est singulier pour  $K_2$  et qui passe par ce point.

*Démonstration:* Soit  ${}^1x$  le point singulier de  $K_1$ ; alors on a

$$(A + \bar{A}) \cdot {}^1x = 0 \quad \text{ou} \quad A \cdot {}^1x = -\bar{A} \cdot {}^1x .$$

C'est-à-dire le point  ${}^1x$  appartient au couple involutif. Soit  ${}^2\xi = A \cdot {}^1x$ ; ensuite nous avons:

$$(A^{-1} + \bar{A}^{-1}) \cdot {}^2\xi = (I + \bar{A}^{-1} \cdot A) \cdot {}^1x = \bar{A}^{-1} \cdot (\bar{A} + A) \cdot {}^1x = 0 ,$$

c'est-à-dire  ${}^2\xi$  est le plan singulier de la quadrique  $K_2$ .

THÉORÈME 13. — Le plan d'une paire involutive qui n'est pas le plan singulier de la surface  $K_2$ , possède tous les points singuliers de la quadrique  $K_1$ . Le point d'un couple involutif qui n'est pas singulier pour la quadrique  $K_1$  est situé dans tous les plans singuliers de la surface  $K_2$ .

*Démonstration:* Elle découle des théorèmes 12 et 10.

## 2. — LA CLASSIFICATION DES CORRÉLATIONS PLANES.

THÉORÈME 14. — Les coniques fondamentales de la corrélation plane  $A$  se confondent en une seule conique quand et uniquement quand; la corrélation est la polarité.

*Preuve:* Soit  $K_1 \equiv K_2$ . Ensuite la droite qui correspond au point  ${}^1x$  de la conique  $K_1$  est la tangente de cette courbe en  ${}^1x$ . L'homographie  $\bar{A}^{-1} \cdot A$  possède chaque point de la conique  $K_1$  pour point double et il en résulte qu'elle est l'identité.

En raison du théorème 8, la corrélation  $A$  est la polarité. Dans ce qui suit nous excluons ce cas et nous supposons que  $A$  ne soit pas la polarité.

THÉORÈME 15. — Quand les coniques fondamentales de la corrélation  $A$  sont les coniques irréductibles nous n'allons distinguer que deux cas:

1° La conique  $K_1$  est tangente à  $K_2$  aux deux points  $a, b$ ; la corrélation  $A$  possède trois couples involutifs  $(a; T_a)$ ,  $(b; T_b)$ ,  $(T_a \times T_b; ab)$ , où  $T_a, T_b$  sont les tangentes communes en  $a$ , respectivement en  $b$ .

2° Les coniques  $K_1$  et  $K_2$  ont, au point  $a$ , le contact quadriponctuel (d'ordre trois); la corrélation  $A$  possède un couple involutif  $(a; T_a)$ , où  $T_a$  est la tangente au point  $a$ .

*Démonstration:* Soit  $a$  le point commun des coniques irréductibles  $K_1, K_2$ . La droite qui correspond involutivement au point  ${}^1a \equiv a$  est la tangente de  $K_2$ . Le théorème 10 montre que cette droite est aussi tangente à  $K_1$  en  $a$ . Il en résulte que les coniques  $K_1$  et  $K_2$  peuvent posséder en commun soit deux points distincts  $a, b$  avec les tangentes  $T_a, T_b$ , soit un seul point  $a$  avec contact quadriponctuel.

1° Dans le premier cas la droite  $ab$  correspond involutivement au point  $0 \equiv (T_a \times T_b)$ . (Voir fig. 1.) La corrélation  $A$  n'a pas les autres couples involutifs. Soit  $(p; P)$  un tel couple; d'après le théorème 10 le point  $p$  est situé sur la droite  $ab$ . Si le point  ${}^1r$  est un point des points communs à la droite  $P$  et à la conique  $K_1$ , il correspond involutivement à la droite  $p{}^1r \equiv {}^2X$ . Ensuite

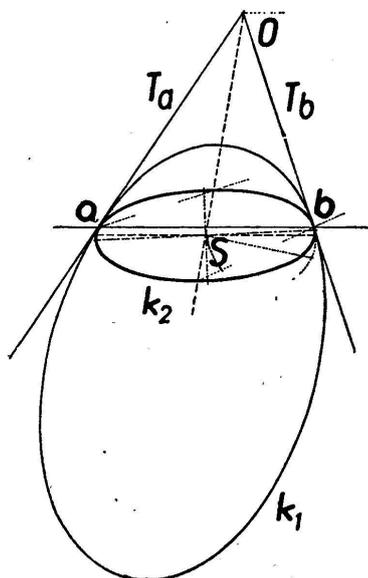


Fig. 1

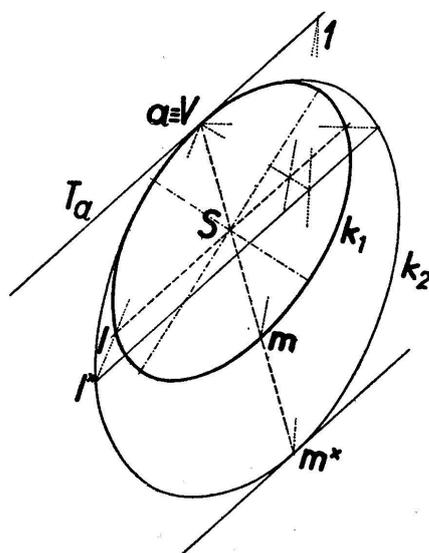


Fig. 2.

l'homographie  $\bar{A}^{-1}$ .  $A$  a quatre points doubles, à savoir:  $a, b, (T_a \times T_b), {}^1r$  qui sont linéairement indépendants, et par suite elle est l'identité, c'est-à-dire que la corrélation  $A$  est la polarité. (*Per absurdum.*)

2° Dans le second cas, nous n'avons qu'un seul couple involutif, à savoir  $(a; T_a)$ . (Voir fig. 2.) Si  $(p; P)$  est un autre couple involutif, le point  $p$  est situé sur la tangente  $T_a$  (d'après le théorème 10). Le point  ${}^1y$  qui est un point des points d'intersection de la conique  $K_1$  et de la droite  $P$  correspond involutivement à la droite  ${}^1yp \equiv {}^2Y$ . C'est-à-dire que la conique  $K_2$  passe par le point  ${}^1y \neq a$ . Mais les coniques  $K_1, K_2$  possèdent en  $a$  le contact d'ordre 3 en commun.

THÉORÈME 16. — Quant à la conique  $K_1$  décomposée en deux droites distinctes  $L, S$  et quant à la conique  $K_2$  décomposée en deux points  $l_1, l_2$ , nous avons seulement un cas.

3° La droite  $L_2 \equiv l_1 l_2$  passe par le point  $l \equiv (L \times S)$ . Ni le point  $l_1$  ni le point  $l_2$  ne peuvent coïncider en  $l$ . La corrélation  $A$  a deux couples involutifs:  $(l; L_2), (s; L_1)$ , où  $s$  est le point de la droite  $L_2$  pour lequel  $(lsl_1 l_2) = -1$  et  $L_1$  est la droite du faisceau  $(l)$  déterminé par le birapport harmonique  $(LSL_1 L_2) = -1$ .

*Démonstration:* Le théorème 12 montre que  $(l; L_2)$  est un couple involutif et que  $l$  est situé sur  $L_2$ . (Voir fig. 3.) La droite  ${}^2S$  du faisceau  $(l)$ , qui correspond au point  ${}^1s \equiv s$  donné sur  $L$  par la relation  $(lsl_1 l_2) = -1$ , forme avec  $s$  un couple involutif d'après le théorème 11.

D'après le théorème 10 nous avons  ${}^2S \equiv L_1$ , où  $L_1$  est la droite du faisceau  $(l)$  pour laquelle  $(LSL_1 L_2) = -1$ . Si un couple  $(p; P)$ , différent de  $(l; L_2)$ , est un couple involutif de la corrélation  $A$ , nous déduirons, d'après le théorème 13, que  $p$  est situé sur  $L_1$ , c'est-à-dire  $P \equiv L_1, p \equiv s$ .

THÉORÈME 17. — Si la conique  $K_1$  est dégénérée en droite double  $L$  et si la conique  $K_2$  est le point double  $l$ , on peut démontrer que:

4° Le point  $l$  n'est pas situé sur la droite  $L$ . La corrélation  $A$  possède le couple  $(l; L)$  involutif et le faisceau des couples  $(x; X)$

involutifs, où  $x$  parcourt la droite  $L$  et où  $X$  est la droite  $xl$ . (Voir fig. 4.)

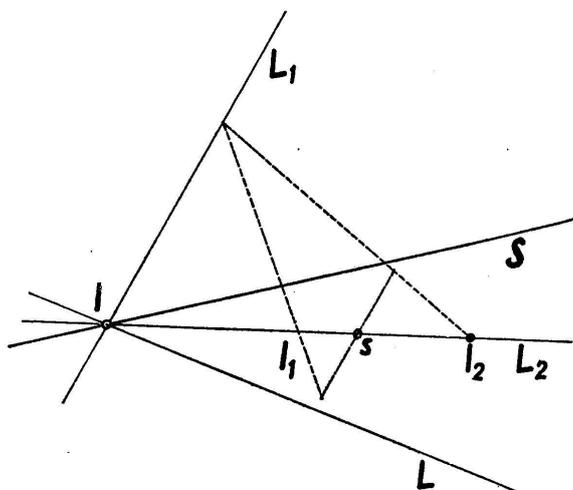


Fig. 3.

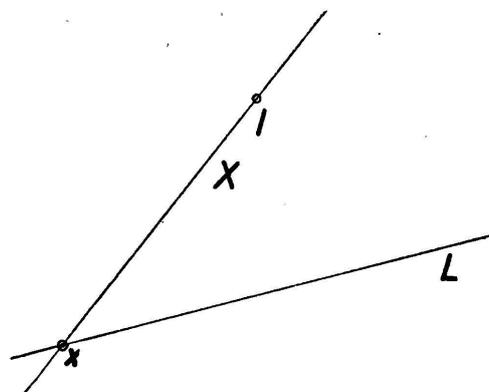


Fig. 4.

La démonstration est simple.

THÉORÈME 18. — Si nous choisissons convenablement le système des coordonnées, nous pouvons écrire pour la corrélation du premier ou du quatrième cas :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Quand, et uniquement quand  $a_{21} \neq \pm a_{12}$ , nous obtenons le premier cas et, quand et uniquement quand  $a_{21} = -a_{12}$ , nous obtenons le quatrième.

*Preuve:* Nous choisirons dans le premier cas:  $a \equiv o_1$ ,  $b \equiv o_2$ ,  $(T_a \times T_b) \equiv o_3$ ; dans le quatrième:  $l \equiv o_3$ ; les deux points de la droite  $L_2$ , qui sont distincts et différents de  $l$ , seront pris pour  $o_2$ , respectivement  $o_3$ .

Si  $a_{21} = a_{12}$ , la corrélation est la polarité. (D'après le théorème 7.) Si  $a_{21} = -a_{12}$ , la conique  $K_1$  est la droite double.

THÉORÈME 19. — La corrélation du cas 3<sup>o</sup> peut être écrite :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{11} \neq 0.$$

*Preuve:* Soit  $s \equiv o_3$ ,  $L_1 \equiv x_3 = 0$ ,  $l \equiv o_2$ .

Comme  $K_1$  est la conique décomposée en deux droites  $L, S$  qui passent par  $o_2$ , on a  $a_{21} = -a_{12}$ ,  $a_{11} \neq 0$ .

THÉORÈME 20. — La corrélation du cas 2<sup>o</sup> peut être écrite de la manière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{21} \neq 0.$$

Démonstration: Soit  $a \equiv o_3$ ,  $T_a \equiv x_1 = 0$ .

Soit  $o_2$  un point arbitraire sur  $T_a$  et soit  $x_2 = 0$  la droite qui correspond au point  $o_2$  en  $A$ . Enfin soit  $o_1$  le point d'intersection de la conique  $K_1$  avec la droite  $x_2 = 0$ . (Voir fig. 5.)

Les droites qui correspondent au point  $(0 : y_2 : y_3)$  dans les deux espaces pris en considération sont:

$${}^2(a_{13}y_3 : a_{22}y_2 : 0), \quad {}^1((a_{21}y_2 + a_{31}y_3) : a_{22}y_2 : 0).$$

L'équation  $a_{13}y_3 : a_{22}y_2 = (a_{21}y_2 + a_{31}y_3) : a_{22}y_2$  a (d'après le théorème 15) une unique solution, à savoir:  $y_2 = 0$ ; alors nous aurons  $a_{31} = a_{13}$ ;  $a_{21} \neq 0$ .

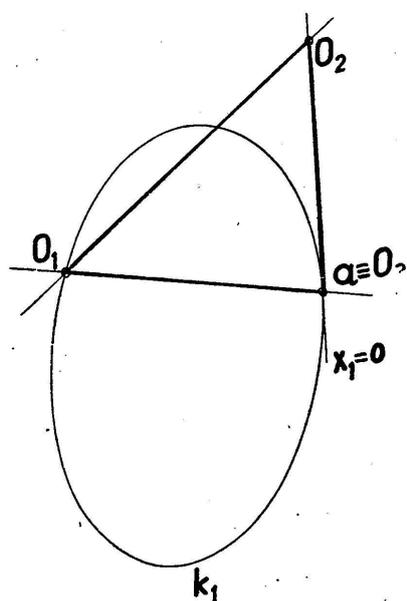


Fig. 5.

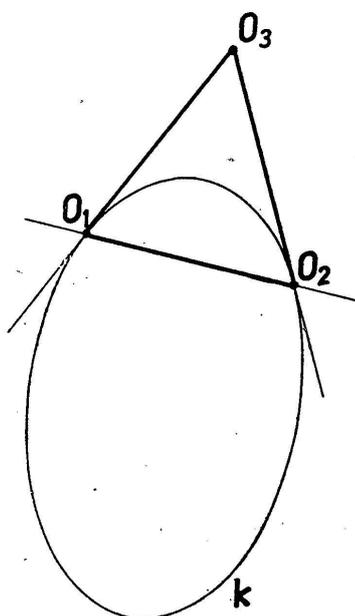


Fig. 6.

THÉORÈME 21. — La polarité plane peut être écrite d'une des manières suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Le choix des systèmes des coordonnées est évident. (Voir fig. 6 et 7.)

### 3. — LA CLASSIFICATION DES CORRÉLATIONS DANS UN ESPACE À TROIS DIMENSIONS.

THÉORÈME 22. — Chaque corrélation régulière dans l'espace possède un couple involutif des éléments qui coïncident.

*Démonstration:* Le théorème 9 montre que chaque corrélation  $A$  a un couple involutif  $({}^1a; {}^2\alpha)$ . Soit le point  ${}^1a$  en dehors du plan  ${}^2\alpha$ . Les plans  ${}^2\xi$ , qui correspondent aux points  ${}^1x$  du plan  ${}^2\alpha$ , coupent  ${}^2\alpha$  aux droites  ${}^2X$ . Les éléments des couples  $({}^1x; {}^2X)$  correspondent l'un à l'autre dans une corrélation plane  $B$  non singulière (Dét.  $|B| \neq 0$ ) qui possède un couple involutif des éléments coïncidents. Ensuite le plan déterminé par le point  ${}^1a$  et par la droite  ${}^2B$  correspond involutivement au point  ${}^1b$  dans  $A$ .

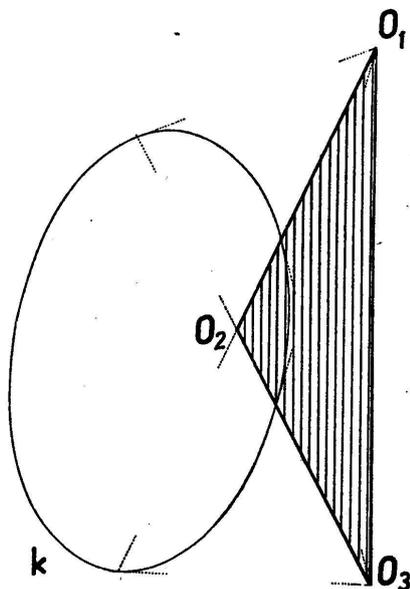


Fig. 7.

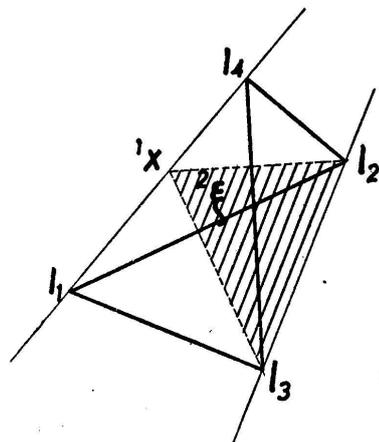


Fig. 8.