première cubique de Lucas.

La cubique lieu de M_0 a pour équation

$$\frac{a_1\eta_0 - a_2\xi_0}{a_1\zeta_0 - a_3\xi_0} \cdot \frac{b_2\zeta_0 - b_3\eta_0}{b_2\xi_0 - b_1\eta_0} \cdot \frac{c_3\xi_0 - c_1\zeta_0}{c_3\eta_0 - c_2\zeta_0} = 1 .$$

Ces cubiques dépendent de six constantes arbitraires (cubique générale circonscrite).

L'absence du terme $\xi\eta\zeta$ se produit pour $a_3 b_1 c_2 = a_2 c_1 b_3$, c'est-à-dire lorsque les droites AA_0, BB_0, CC_0 concourent.

Il en est en particulier ainsi lorsque $A_0 B_0 C_0$ sont les points à l'infini des hauteurs du triangle. On est alors en présence du cas qui fit l'objet de la question posée par Edouard LUCAS: on joint les sommets ABC du triangle à un point P de son plan; soient A′, B′, C′ les intersections de ces droites AP, BP, CP avec les côtés opposés. Le lieu de P est défini par la condition que les perpendiculaires aux côtés en A′B′C′ concourent en un point Q.

Le lieu de P est la *première cubique* de Lucas; le point Q associé décrit la *seconde cubique de Lucas*.

Ces cubiques ont donné lieu à quelques exercices relatifs à cette question et à la propriété de concours de normales de coniques circonscrites ou inscrites au triangle fondamental [1].

LA PREMIÈRE CUBIQUE DE LUCAS.

8. — L'équation de la première cubique en coordonnées barycentriques est

$$\Sigma a^2 \cdot \frac{\eta - \zeta}{\eta + \zeta} = 0 ;$$

a, b, c, sont les côtés du triangle.

---

[1] Edouard LUCAS, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2me série, t. XV, 1876, p. 240; 550-555.

Nouvelle Correspondance mathématique, t. II, 1876, p. 94; IV, 1878, p. 261-272; t. V, 1879, p. 87; VI, 1880, p. 56.

Emile LEMOINE, *Association française pour l'avancement des Sciences*, Paris, 1889, p. 21.

G. PAPELIER, *Leçons sur les coordonnées tangentielles*, 1894, t. I, p. 284.

E. MOSNAT, *Problèmes de géométrie analytique*, t. II, 1905, p. 470.

J. KŒHLER, *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure*, 1886, t. I, p. 195-197.

Voir aussi la référence relative à une question de G. DARBOUX et à l'ouvrage de M. A. HAARBLEICHER indiquée à la suite (paragraphe 12).

En posant

$$\operatorname{cotg} A = \alpha\,, \quad \operatorname{cotg} B = \beta\,, \quad \operatorname{cotg} C = \gamma\,, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1\;;$$

$$a^2 = 2S(\beta + \gamma)\,, \quad b^2 = 2S(\gamma + \alpha)\,, \quad c^2 = 2S(\alpha + \beta)\,,$$

cette équation se met sous la forme:

$$\Sigma \alpha \xi (\eta^2 - \zeta^2) = 0\,.$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \frac{1}{\xi} & \frac{1}{\eta} & \frac{1}{\zeta} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Elle est du type invariant dans la *transformation réciproque*, avec tangentes en A, B, C concourantes en un point $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ qui est le *réciproque* de l'orthocentre H.

La première cubique est le lieu des *points réciproques, associés de telle sorte que leur droite de jonction passe par le point fixe* Φ.

La première cubique passe par les points A, B, C, le centre de gravité G, l'orthocentre H, le pivot Φ, le symétrique H_1 de H par rapport au centre O du cercle circonscrit; par les sommets G', G'', G''' du triangle constitué par les parallèles aux côtés de ABC menées par A, B et C.

Les points G, G', G'', G''' sont les points doubles de la transformation réciproque ($\xi\xi_1 = \eta\eta_1 = \zeta\zeta_1$).

Le point H_1 est situé sur la droite d'Euler, qui est rencontrée par la première cubique en H, G, H_1.

Ce point H_1 est l'orthocentre du triangle $G'G''G'''$. Il est aussi l'orthocentre du triangle $A_1B_1C_1$ dont les sommets sont diamétralement opposés sur le cercle circonscrit à A, B et C.

H_1 est aussi le centre radical des trois cercles de centres A, B, C et de rayons respectivement égaux aux côtés opposés a, b et c.

On peut prendre pour coordonnées normales de ce point H_1

$$\left\{\begin{aligned} x &= \cos B \cos C - \cos A\,, \\ y &= \cos C \cos A - \cos B\,, \\ z &= \cos A \cos B - \cos C\;; \end{aligned}\right.$$

et comme coordonnées barycentriques

$$\xi = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} A ,$$
$$\eta = \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B ,$$
$$\zeta = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C ;$$

ses coordonnées barycentriques *absolues* ($\xi + \eta + \zeta = 1$) sont:

$$\xi = 1 - 2\beta\gamma , \quad \eta = 1 - 2\gamma\alpha , \quad \zeta = 1 - 2\alpha\beta ; \qquad (H_1)$$

les coordonnées absolues de H étant

$$\xi = \beta\gamma , \quad \eta = \gamma\alpha , \quad \zeta = \alpha\beta ,$$

et celles du centre O du cercle circonscrit

$$\xi = \frac{1}{2}\alpha(\beta + \gamma) , \quad \eta = \frac{1}{2}\beta(\gamma + \alpha) , \quad \zeta = \frac{1}{2}\gamma(\alpha + \beta) ;$$

ces formules mettent bien en évidence ($\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$) que le milieu de HH_1 n'est autre que O.

Ajoutons que le point H_1 est situé sur l'hyperbole équilatère conjuguée passant par G, I, I′, I″, I‴ ayant pour centre le point de Steiner:

$$\Sigma(b^2 - c^2)\xi^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Sigma(\beta - \gamma)\xi^2 = 0 ,$$
$$\sum \frac{y^2 - z^2}{a^2} = 0 ,$$

courbe connue de la géométrie du triangle.

La cubique et cette hyperbole équilatère sont tangentes au centre de gravité G; la tangente est la droite GK de jonction de G et du point K de Lemoine.

La tangente H_1 à la première cubique a pour équation

$$\Sigma\alpha(\beta - \gamma)^2\xi = 0 ,$$

et passe par le point de Steiner.

La tangente en H

$$\Sigma\alpha^3(\beta^2 - \gamma^2)\xi = 0$$

passe par le point

$$\xi = \frac{1}{\alpha^3} = \operatorname{tg}^3 A , \quad \text{etc.},$$

elle rencontre à nouveau la courbe en un point de coordonnées barycentriques

$$\xi = \mathrm{tg}\,A\,(\mathrm{tg}^2 B + \mathrm{tg}^2 C - \mathrm{tg}^2 A)\ ,\quad \text{etc.}\ \ldots$$

Voici la distribution de quelques points remarquables de la première cubique, d'après les points de concours des tangentes et avec l'indication des arguments respectifs dans la représentation elliptique:

1er groupe. Points de contact des tangentes à la cubique issues de l'orthocentre H ($\wp$).

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & \Phi \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0\ . \end{array}$$

2me groupe. Points de contact des tangentes issues du point Φ (0).

$$\begin{array}{cccc} G & G' & G'' & G''' \\ \frac{\wp}{2} & \frac{\wp}{2} + \omega_1 & \frac{\wp}{2} + \omega_2 & \frac{\wp}{2} + \omega_3\ . \end{array}$$

3me groupe. Points de contact des tangentes issues du point ($-\wp$):

$$\begin{array}{cccc} H & \Phi' & \Phi'' & \Phi''' \\ \wp & \wp + \omega_1 & \wp + \omega_2 & \wp + \omega_3\ . \end{array}$$

$\Phi'\Phi''\Phi'''$ sont les projections de H_1 sur les côtés BC, CA, AB. Les hauteurs de $G'G''G'''$ sont précisément les droites $G'\Phi'$, $G''\Phi''$ et $G'''\Phi'''$.

La condition d'alignement de trois points sur la cubique est:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \wp\ .$$

La seconde cubique de Lucas.

9. — En coordonnées normales, l'équation de la seconde cubique est:

$$\Sigma(\cos B \cos C - \cos A)\,x\,(y^2 - z^2) = 0\ ;$$