

5. — Cercles bitangents, cercles focaux.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Pour $k \neq 1$, on a, d'après (11),

$$\frac{\overline{Mn}}{\overline{M\Omega}} = \frac{\overline{H\omega}}{\overline{H\Omega}} = 1 + \frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{H\Omega}} = 1 - k ;$$

donc, les deux axes Ox , Oy d'une courbe $\mathcal{C}$ à centre déterminent sur toute normale à cette courbe deux segments $\overline{Mn}$, $\overline{M\Omega}$ dont le rapport est constant et égal à $1 - k$.

5. — CERCLES BITANGENTS, CERCLES FOCAUX.

Soit $k \neq 1$; à toute parallèle D à ωx , coupant d en H , nous associons un cercle Γ grâce à la relation (10), toutes les fois du moins que cette relation donne un lieu ou un point. Ce cercle Γ , qui peut donc être un cercle point¹, est appelé un *cercle focal*, dont D est dite la *droite directrice*. Dans les cas où D et Γ se coupent, Γ est un cercle *bitangent* à $\mathcal{C}$.

Soit M_1 un point quelconque, comme (11) et (12) donnent:

$$\frac{\overline{\Omega H}}{1} = \frac{\overline{H\omega}}{k-1} = \frac{\overline{\omega\Omega}}{-k} ,$$

la relation (3) appliquée aux trois cercles γ , Γ , H d'un même faisceau s'écrit:

$$\mathcal{P}(M_1, \gamma) + (k-1) \cdot \mathcal{P}(M_1, \Gamma) - k\mathcal{P}(M_1, H) = 0 ,$$

ou, exprimant $\mathcal{P}(M_1, H)$ à l'aide de $M_1 d$ et $M_1 D$,

$$[\mathcal{P}(M_1, \gamma) - k\overline{M_1 d}^2] + (k-1) \left[\mathcal{P}(M_1, \Gamma) - \frac{k}{k-1} \overline{M_1 D}^2 \right] = 0 .$$

Donc, la courbe $\mathcal{C}$ est susceptible d'être définie à partir de chaque couple Γ , D par la relation:

$$\mathcal{P}(M_1, \Gamma) = K \overline{M_1 D}^2 ,$$

dans laquelle on a posé:

$$K = \frac{k}{k-1} , \quad \text{ou} \quad \frac{1}{K} + \frac{1}{k} = 1 .$$

¹ On pourrait même sans grande difficulté parler ici de cercles imaginaires à centres réels.

Le passage d'un cercle Γ de centre Ω et d'une droite D de pied H à un cercle Γ_1 de centre Ω_1 et à une droite D_1 de pied H_1 est immédiat, que ce soit Ω_1 ou H_1 qui soit donné. En effet, ΩH et $\Omega_1 H_1$ passant par ω , on a :

$$\frac{\overline{\Omega\Omega_1}}{\overline{HH_1}} = \frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{H\omega}} = \frac{k}{k-1} = K ;$$

d'autre part, l'axe radical Δ de Γ et Γ_1 est parallèle à ωx et passe par le point de rencontre des axes radicaux de Γ avec γ et de Γ_1 avec γ . Mais ceux-ci sont aussi les axes radicaux de γ avec H et de γ avec H_1 , donc Δ est l'axe radical de H avec H_1 , c'est-à-dire la médiatrice de HH_1 .

Faisons jouer maintenant à Γ , D , K les rôles que jouaient tout d'abord γ , d , k et cherchons l'intersection de $\mathcal{C}$ et de d . Il nous faudra construire la circonférence définie par

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) = K \overline{MH}^2 . \quad (10')$$

Or, comme l'on a, d'après (3),

$$\overline{\Omega H} \mathcal{P}(M, \gamma) + \overline{H\omega} \mathcal{P}(M, \Gamma) + \overline{\omega\Omega} \overline{MH}^2 = 0 ,$$

ou

$$\overline{\Omega H} \mathcal{P}(M, \gamma) + \overline{H\omega} [\mathcal{P}(M, \Gamma) - K \overline{MH}^2] = 0 ,$$

la circonférence à construire est donc γ .

Ainsi le procédé qui, de d , γ , k , nous a permis de passer à D , Γ , K , permet aussi de revenir des circonférences Γ à une famille de circonférences centrées sur Ox et dont γ fait partie.

En résumé: toute courbe $\mathcal{C}$ à centre est susceptible d'une double infinité de définitions comme lieu des points dont le quotient de la puissance par rapport à un cercle focal par le carré de la distance à une droite directrice est constant. Les centres des cercles focaux sont sur les deux axes de $\mathcal{C}$ auxquels les droites directrices sont respectivement perpendiculaires. A tous les cercles ayant leurs centres sur Ox correspond la même constante k , à tous ceux ayant leurs centres sur Oy correspond la même constante K ; on a

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{K} = 1 . \quad (13)$$

On passe d'un cercle focal, soit γ de centre ω sur Ox , à un cercle γ_1 de la même série en remarquant qu'au déplacement $\overline{\omega\omega_1}$ du centre correspond le déplacement $\overline{dd_1}$ de la droite directrice, tel que

$$k \overline{dd_1} = \overline{\omega\omega_1} \quad (14)$$

et que l'axe radical de γ et γ_1 est la droite équidistante de d et de d_1 .

On passe aux cercles focaux de l'autre série en considérant les cercles définis par

$$\mathcal{F}(M, \gamma) = k \overline{MH}^2 ; \quad (10)$$

H étant un point quelconque de la droite directrice d du cercle γ .

6. — NATURE DES COURBES $\mathcal{C}$, LORSQUE k EST DIFFÉRENT DE 1.

Il sera démontré que $\mathcal{C}$ est une conique à centre si nous trouvons un cercle focal de rayon nul.

Γ sera de rayon nul, si cette circonférence est réduite à son centre, c'est-à-dire est le second cercle point du faisceau γ, H ; donc si l'on a:

$$\overline{\omega\Omega} \cdot \overline{\omega H} = r^2 .$$

Ainsi, Ω devra être à la rencontre de Oy et du cercle δ inverse de d , γ étant le cercle d'inversion. Si δ coupe Oy , leurs points de rencontre sont des centres de cercles Γ de rayon nul; $\mathcal{C}$ est une conique d'axe focal Oy .

Or δ a pour diamètre

$$\frac{r^2}{\overline{\omega d}} ,$$

et, d'après (12),

$$\overline{\omega O} = K \overline{\omega d} ,$$

donc $\mathcal{C}$ est une conique d'axe focal Oy si l'on a:

$$K > 0 , \quad r^2 > K \overline{\omega d}^2 ; \quad (15)$$

$\mathcal{C}$ est une conique d'axe focal Ox si l'on a:

$$k > 0 , \quad R^2 > k \overline{\Omega D}^2 . \quad (16)$$