

# 10. – MOUVEMENTS D'UN POINT MATÉRIEL, DANS LE PLAN, SUIVANT LA LOI DES AIRES SUR L'HODOGRAPHE.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le rayon de courbure de l'image de courbure est donc  $\rho_1$

$$\rho_1 = \frac{1}{9} \rho^{-\frac{7}{3}} (9\rho^2 - 3\rho\rho'' + 4\rho'^2),$$

$\rho'$  et  $\rho''$  désignant les dérivées première et seconde de  $\rho(\varphi)$ .

L'image se réduit à un point lorsque la courbe (C) est une parabole ( $\rho_1 = 0$ ).

Dans le cas de la courbe d'égle pression, l'image de courbure de Minkowski de cette courbe est l'enveloppe d'une droite d'équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = k(a + \sin \varphi);$$

l'image est ainsi une *circonférence*. Cet exemple est de ceux qui illustrent le mieux la théorie des images de la courbure.

#### 10. — MOUVEMENTS D'UN POINT MATÉRIEL, DANS LE PLAN, SUIVANT LA LOI DES AIRES SUR L'HODOGRAPHE.

L'étude de la courbe de pression constante dans le mouvement du point pesant pose la question des mouvements avec loi des aires sur l'hodographe.

La condition est:

$$v^2 \frac{d\alpha}{dt} = C = \text{constante}.$$

avec ses formes équivalentes:

$$v^3 = C \cdot \rho, \quad \rho^2 \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^3 = \text{const},$$

d'où la loi du temps correspondante:

$$nt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \rho^{\frac{2}{3}} d\alpha;$$

$n$  est une constante. Cette intégration est donc attachée simplement à l'équation naturelle de la courbe trajectoire du point matériel, et à sa radiale de Tücker.

Si la radiale est représentée par l'équation polaire

$$\rho = f(\alpha) ,$$

l'hodographe du mouvement a, dans le cas actuel, pour équation polaire

$$r^3 = C \cdot f(\alpha) .$$

Les deux courbes, la radiale et l'hodographe, se correspondent par une transformation ponctuelle sur le rayon vecteur:

$$r^3 = C \cdot \rho .$$

*Exemples.* — 1° Correspondance entre cercles concentriques.  
2° A une parabole de foyer O, dont la radiale est la courbe

$$\rho \cos^3 \alpha = a ,$$

correspond l'hodographe d'équation polaire:

$$r \cos \theta = \text{const} ,$$

c'est-à-dire une droite.

3° A une conique de foyer O

$$\rho = p(1 - e^2 \cos^2 \alpha)^{-\frac{3}{2}}$$

correspond un hodographe qui est une conique de centre O:

$$r \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} = \text{const} ;$$

$$x^2(1 - e^2) - y^2 = \text{const} .$$

4° A la spirale logarithmique d'équation naturelle

$$\rho = ae^{m\alpha}$$

correspond l'hodographe

$$r = be^{\frac{1}{3}m\theta} ,$$

qui est une nouvelle spirale logarithmique.

5° A l'hypocycloïde à trois rebroussements

$$\rho = a \sin 3\alpha ,$$

correspond l'hodographe d'équation polaire

$$r^3 = A \sin 3\alpha ;$$

C'est la cubique de Tschirnhausen, caustique de parabole, inverse d'orthogénide.

6° La spirale d'Archimède est l'hodographe associé ainsi à une trajectoire d'équation naturelle

$$\rho = \alpha^3 \times \text{const} ,$$

c'est-à-dire à une développante supérieure de cercle.

7° A la chaînette

$$\rho \cos^2 \alpha = a ,$$

correspond l'hodographe:

$$r \cos^{\frac{2}{3}} \theta = \text{const} .$$

## 11. — PENDULE À TENSION CONSTANTE.

Déterminer la courbe  $\Gamma$  sur laquelle il faut enrouler le fil qui soutient le pendule simple restant dans un plan vertical, pour que la tension du fil soit constante.

La courbe ( $\Gamma$ ) est évidemment la développée d'une courbe à pression constante pour le mouvement du point pesant.

L'équation *naturelle* de la courbe à pression constante est:

$$\rho = \frac{2A}{(\cos \alpha - N)^3} ;$$

en dérivant, on obtient l'équation naturelle de la courbe du pendule à tension constante:

$$\rho = \frac{B \sin \alpha}{(\cos \alpha - N)^4} .$$