Préliminaires.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

On se propose ici de rechercher toutes les transformations circulaires ponctuelles et réelles du plan, et de donner ensuite leurs propriétés fondamentales par des voies élémentaires. Dans ce but on démontrera directement que toutes ces transformations admettent un couple réel de points doubles ou de points conjugués; on en déduira la possibilité de représenter chaque transformation circulaire par une autre plus simple (le plus souvent une similitude), dans laquelle sont mises en évidence les propriétés intrinsèques de la première. On obtient ainsi très simplement des résultats essentiels que la méthode classique des affixes imaginaires ne pourrait donner qu'après de longs calculs. En outre la méthode employée ici s'applique sans changement aux transformations sphériques de l'espace à trois dimensions, qui feront l'objet d'une étude faisant suite à celle-ci.

Préliminaires.

§ **1.** — Nous supposons connus:

1º Les propriétés classiques de l'inversion dans le plan;

2º Les définitions relatives aux groupes de transformations géométriques;

3º Les théorèmes suivants concernant les similitudes du plan:

a) *Toute similitude directe peut être considérée comme le produit d'une homothétie par une rotation autour du centre d'homothétie.* Cette décomposition est possible d'une seule manière; le point double unique ainsi mis en évidence est le *centre* ou *pôle* de similitude. En général, il n'y a pas de droite double ni de cercle double.

b) *Toute similitude inverse peut être considérée comme le produit d'une homothétie par une symétrie autour d'une droite passant par le centre d'homothétie.* Ce point ω et cette droite Δ sont dits *centre* ou *pôle* et *axe* de similitude inverse. Ici, il y a, comme tout à l'heure, un point double: le centre ω; mais il y a *deux* droites doubles: l'axe Δ et la perpendiculaire Δ' à l'axe menée par le centre.

En particulier, on passe d'une figure à une autre directement égale par un *déplacement* qui se réduit à une rotation ou à une translation; d'une figure à une autre inversement égale, par un *retournement*, qui se réduit à une symétrie autour d'une droite, suivie d'une translation parallèle à cette droite.

Chapitre I. — Définitions et théorèmes généraux.

§ **2.** — *Définition.* — *Une transformation ponctuelle réelle, biunivoque, et continue, du plan sera dite* circulaire *si elle transforme un cercle quelconque en un autre cercle.* Dans cette définition le mot « cercle » désigne une circonférence proprement dite ou une droite.

Exemple: une inversion, un produit d'inversions et de similitudes.

Les transformations circulaires du plan forment un groupe. Evident.

Théorème I. — *Si une transformation circulaire* Γ *est définie pour tous les points du plan euclidien, elle se réduit à une similitude.*

Soit en effet A' le transformé d'un point quelconque A; D_1' et D_2' deux droites passant par A'. Les cercles D_1 et D_2 qui ont D_1' et D_2' pour homologues se coupent en A et en un autre point $\overline{A}$, qui ne peut avoir d'homologue $\overline{A'}$, car ce point $\overline{A'}$ devrait être commun à D_1' et D_2', tout en étant distinct de A'. Donc D_1 et D_2 sont nécessairement des droites.

Par suite, les droites de la figure F' sont les transformées des droites de F; Γ est donc une homographie. Comme elle transforme les cercles en cercles, c'est une similitude.

Corollaire. — *Si* Γ *ne se réduit pas à une similitude, il existe au moins un point* Φ *du plan pour lequel elle n'est pas définie.*

Le raisonnement qui précède montre que les cercles passant par un tel point Φ sont transformés en droites. Nous allons montrer qu'il n'existe qu'un point Φ, c'est-à-dire que:

Théorème II. — *Une transformation circulaire proprement dite* Γ *étant donnée, il existe dans le plan un point* Φ *et un seul tel que tous les cercles passant par* Φ *soient transformés en droites.*

En effet, s'il existait deux points singuliers de ce genre Φ_1 et Φ_2, on pourrait prendre des couples de cercles C_1 et C_2 passant