IV. — La correspondance équilongue.

deux points homologues ne peut pas prendre de valeurs négatives; il résulte alors d'une remarque antérieure que V et γ sont identiques. V étant un cercle, C est une orbiforme. Le raisonnement est identique si $D = S$.

IV. — La correspondance équilongue.

Considérons deux ovales quelconques C et C'; on peut toujours, d'une infinité de façons, établir entre les deux ovales une correspondance ponctuelle conservant les déflexions. Il suffit, à cet effet, de prendre arbitrairement deux points A et A' sur C et C' dont les tangentes font un certain angle α, puis d'associer les couples de points M et M' de C et C' tels que les déflexions des arcs $\overset{\frown}{AM}$, $\overset{\frown}{A'M'}$ soient constamment égales. M et M' peuvent décrire C et C' en tournant dans le même sens ou dans des sens inverses; nous nous bornerons à envisager le premier cas. Il est clair que, sur C et C', les couples de points diamétralement opposés se correspondent.

La correspondance établie par M et M' sur C et C' est dite par M. B. Segre *équilongue* si la distance de deux tangentes parallèles de C est constamment égale à la distance des deux tangentes homologues de C'. M. Segre justifie sa définition en montrant que, lorsqu'il en est ainsi, C et C' ont même longueur. Cette propriété devient immédiate si l'on fait tourner C de l'angle $-\alpha$; après la rotation, C et C' (qui se correspondent par tangentes parallèles) ont même largeur dans toutes les directions, donc même domaine vectoriel et par suite même longueur (moitié de la longueur du domaine vectoriel).

Il se trouve que la plupart des propriétés des ovales que M. Segre a rattachées aux correspondances équilongues, peuvent être très simplement obtenues par la rotation d'angle $-\alpha$ effectuée sur C, suivie de la considération du domaine vectoriel commun de C et C'. Considérons par exemple la proposition suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une correspondance conservant les déflexions, entre deux ovales C *et* C', *soit équilongue,* *est que la somme des rayons de courbure du premier ovale en deux points opposés soit constamment égale à celle des rayons de courbure aux points correspondants du second.*

Faisons tourner C de l'angle $-\alpha$, de façon à rendre les tangentes homologues parallèles. Il suffit alors, pour montrer que la condition énoncée est nécessaire, d'observer que, C et C' ayant même domaine vectoriel, les sommes des rayons de courbure de C et C' en deux couples de points diamètralement opposés sont égales au rayon de courbure du point correspondant de la frontière du domaine vectoriel commun (voir le n° I).

La condition est suffisante car, après la rotation, les deux domaines vectoriels, supposés d'abord distincts, doivent avoir la même courbure aux points où les tangentes sont parallèles. Cette propriété entraîne l'identité des deux domaines vectoriels. Les deux ovales C et C' ayant même domaine vectoriel sont bien en correspondance équilongue.

Parmi les autres propositions énoncées par M. Segre envisageons, pour terminer, la suivante:

Si entre deux ovales C *et* C' *existe une correspondance équilongue, il y a toujours sur* C *six points distincts au moins, en chacun desquels la courbure de* C *est égale à celle de* C' *au point correspondant.*

Pour la démonstration amenons toujours, par rotation, C et C' à avoir même domaine vectoriel. On a vu au numéro I que, par une translation de l'un des deux ovales, on pouvait amener C et C' à être bitangents en deux points diamétralement opposés A et B. Considérons alors les deux arcs de C et C' situés d'un côté déterminé de AB; il y a, sur ces deux arcs, en vertu du théorème fondamental du numéro III, deux points homologues (tangentes parallèles) en lesquels les courbures sont égales.

A ces points correspondent sur les deux demi-ovales situés de l'autre côté de AB, des points diamétralement opposés en lesquels, d'après le numéro I, les courbures sont aussi égales. Nous pouvons supposer que la translation dont il a été question plus haut a eu pour effet de rendre C et C′ bitangents aux couples de points diamétralement opposés qui viennent d'être mis en évidence.

Dans la figure (2), C et C′ auront alors même courbure en A et B.

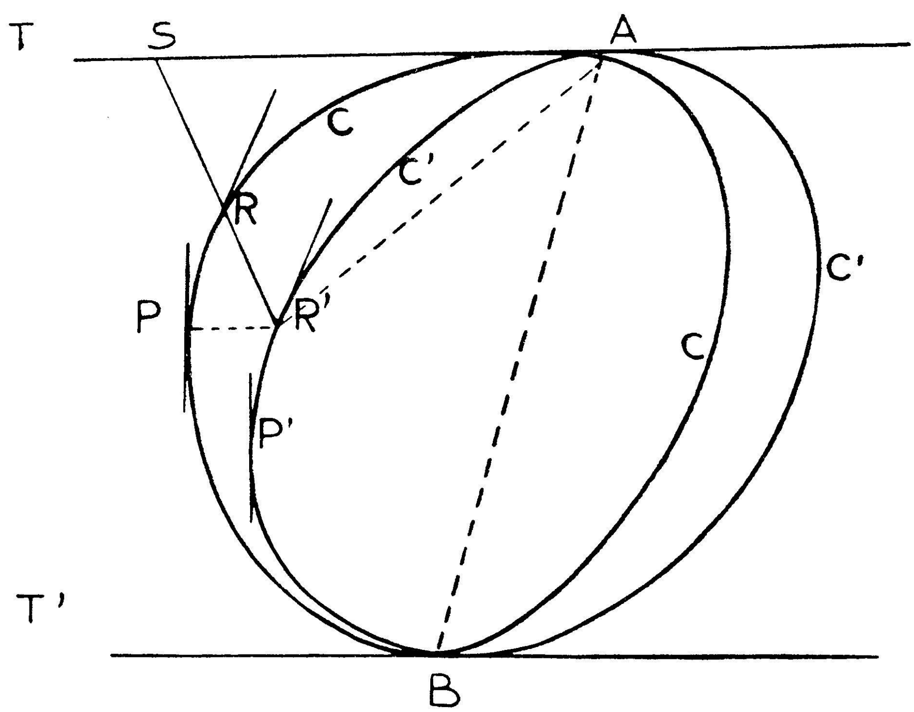

Fig. 2

Si les deux arcs $\widehat{ACB}$, $\widehat{AC'B}$ ont un point commun M distinct de A et B, l'application du théorème fondamental aux deux couples d'arcs d'extrémités A et M, B et M de C et C′, établit immédiatement l'existence de deux nouveaux couples de points opposés sur C et C′ vérifiant la condition de l'énoncé, et l'on a bien, sur chacun des deux ovales, six points en chacun desquels le rayon de courbure est égal au rayon de courbure au point correspondant de l'autre ovale.

Pour démontrer le théorème dans toute sa généralité, nous pouvons donc supposer, conformément à la figure (2), que l'arc $\widehat{AC'B}$ est à l'intérieur de la région du plan déterminé par l'arc $\widehat{ACB}$ et la corde AB.

Continuons à appliquer le même théorème fondamental aux deux ars $\widehat{ACB}$, $\widehat{AC'B}$: il existe sur ces deux arcs deux points homologues P et P′ en lesquels les courbures sont égales.

Avec les points P_1 et P'_1 diamétralement opposés à P et P′, nous avons déjà quatre points sur C répondant à la question.

Pour mettre en évidence le dernier couple de points de l'énoncé menons PR′ parallèle aux tangentes T et T′ en A et B à C et C′, R′ étant sur C′. Soit R le point de C homologue du point R′ de C′. En intervertissant au besoin A et B, on peut supposer que l'on a

$$\text{long. } \overset{\frown}{AP'} \geqq \text{long. } \overset{\frown}{AR'} \;;$$

dans ces conditions long. $\overset{\frown}{AP} \geqq$ long. $\overset{\frown}{AR}$; R est sur l'arc $\overset{\frown}{AP}$, et la droite R′R coupe T en un certain point S (qui peut être rejeté à l'infini si $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{AR}$).

Il suffit d'envisager les deux arcs $\overset{\frown}{AR}$, $\overset{\frown}{AR'}$ tangents en A au côté AS du triangle A S R′, et d'appliquer (sous sa deuxième forme) le théorème du numéro III, pour voir qu'il existe sur C, entre A et R, un point U en lequel le rayon de courbure de C est égal au rayon de courbure de C′ au point homologue U′. Le point U_1 diamétralement opposé à U sur C donne lieu à la même conclusion.

En définitive, conformément au théorème énoncé, nous avons établi l'existence de trois couples de points diamétralement opposés (A, B), (P, P′), (U, U′) en lesquels les rayons de courbure de C sont égaux aux rayons de courbure aux points correspondants de C′.

Si l'on suppose que C′ est confondu avec C, les points homologues étant *diamétralement opposés sur* C, on voit qu'il existe, sur tout ovale, trois couples de points diamétralement opposés en lesquels les courbures sont égales, et que par suite (GANAPATHI, *loc. cit.*) *la courbe moyenne (voir n° II) d'un ovale quelconque présente au moins trois points de rebroussement.*