

# QUELQUES RÉSULTATS RÉCENTS DE LA TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS

Autor(en): **Threlfall, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-27315>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# QUELQUES RÉSULTATS RÉCENTS DE LA TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS <sup>1</sup>

PAR

W. THRELFALL (Dresde).

---

Nous savons tous que le problème d'homéomorphie des variétés à  $n$  dimensions, posé par POINCARÉ, est un des plus intéressants et des plus importants de la Géométrie. Il est intéressant en soi, car il a donné naissance à la Topologie combinatoire ou algébrique, théorie comparable par son importance à la Théorie des fonctions classique. Il est important par ses applications à la Cosmologie, où il s'agit de déterminer l'aspect de l'espace de notre intuition et de la physique. Dès l'instant où le physicien a envisagé la possibilité de considérer l'espace de notre intuition, espace où nous vivons, comme clos, la tâche du mathématicien est de lui proposer un choix d'espaces clos, et même de les énumérer tous, comme il le ferait pour les polyèdres réguliers. De plus, les variétés qui ont trait au problème d'homéomorphie, se présentent comme variétés de solutions de systèmes d'équations différentielles et sont de ce fait importantes pour les questions de stabilité. Elles sont encore plus importantes pour la géométrie algébrique.

Malheureusement le problème n'est complètement résolu que pour deux dimensions. Je vais vous exposer maintenant les recherches qui ont été faites récemment et qui ont pour but la solution du problème pour trois dimensions et plus. Pour simplifier ma tâche, je vais toutefois me borner à des variétés closes

---

<sup>1</sup> Conférence faite le 22 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*. — Traduction revue par M. M. RUEFF (Zurich).

et homogènes; ce sont des variétés qu'il est possible de construire au moyen d'un nombre fini de simplexes à  $n$  dimensions et dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à la sphère massive à  $n$  dimensions.

Comme les variétés de points à  $n$  dimensions ne nous sont pas accessibles dans toute leur généralité, nous nous demanderons où elles se présentent dans la nature, et s'il ne nous serait pas possible de connaître à fond certaines classes plus restreintes qu'on entrevoit dans les applications. Nous restreindrons donc la notion trop générale, sinon dans son étendue, du moins dans son contenu. Nous nous bornerons à des variétés qui possèdent une métrique de RIEMANN, ou bien sont homéomorphes à des variétés algébriques. Ainsi, par exemple, en partant des espaces métriques, nous ferons apparaître des variétés à  $n$  dimensions comme domaines de discontinuité de groupes de mouvements. On les obtient aussi comme espaces des phases de systèmes mécaniques, en particulier comme espaces dont les points sont des éléments d'arcs, de surfaces ou d'autres espaces bien connus; dans ce cas les variétés sont fibrées. Les « fibres » sont composées des éléments d'arcs passant par un même point. Ou encore, on considère des espaces dont les points représentent des mouvements rigides de la sphère à  $n$  dimensions. On peut aussi étudier des hypersurfaces algébriques, ou encore des variétés groupes, qu'on généralise ensuite et dont les points représentent les transformations d'un groupe de Lie. Ou bien, finalement, on recherche les conditions nécessaires pour qu'une variété à  $n$  dimensions puisse être immergée dans un espace euclidien à  $n$  dimensions.

Voyons d'abord les *variétés* à 3 dimensions. Au premier coup d'œil on pourrait espérer les obtenir toutes en étudiant, pour la sphère, l'espace euclidien et l'espace hyperbolique, les domaines de discontinuité des groupes de mouvements sans points fixes. Pour deux dimensions, toute surface close peut être obtenue comme domaine de discontinuité d'un groupe de mouvements sans points fixes, ou de la sphère, ou du plan euclidien, ou du plan hyperbolique. En d'autres termes, on peut imposer à toute surface close une métrique de courbure constante égale à 1,0 ou  $-1$ .

On pourrait donc espérer retrouver les mêmes propriétés pour les espaces à 3 dimensions. Malheureusement il n'en est rien. Le plus simple exemple du contraire est le produit topologique de la sphère et du cercle qui ne se trouve pas parmi les domaines de discontinuité. Ceci parce que sa variété de recouvrement universelle possède deux extrémités à l'infini. Donc le nombre de Betti à 2 dimensions du recouvrement universel est  $p^2 = 1$ <sup>1</sup>. Or, rappelons le théorème important suivant: *Le groupe fondamental d'un domaine de discontinuité est le groupe facteur du groupe de mouvements, engendrant ce domaine de discontinuité, par rapport au plus petit sous-groupe contenant tous les mouvements à points fixes.*

Donc, si le produit topologique cité plus haut était le domaine de discontinuité d'un groupe de mouvements sans points fixes, le groupe de mouvements serait son groupe fondamental. Le recouvrement universel serait par conséquent ou la sphère à 3 dimensions ou l'espace euclidien ou l'espace hyperbolique. Mais ces trois espaces ont un nombre de Betti  $p^2 = 0$  et ne peuvent donc être homéomorphes au recouvrement universel de notre produit topologique. Par contre, ce produit topologique est, pour l'espace euclidien, domaine de discontinuité d'un groupe de mouvements à points fixes qui peut être engendré par les trois transformations suivantes, exprimées en coordonnées cartésiennes:

$$\text{I. } x' = -y + 1, \quad y' = x, \quad z' = z.$$

$$\text{II. } x' = -y - 1, \quad y' = x, \quad z' = z.$$

$$\text{III. } x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + 1.$$

L'étude de tous les domaines de discontinuité des groupes de mouvements sans points fixes ne nous fournira pas tous les espaces à trois dimensions. Mais, contrairement au cas de deux dimensions, déjà l'étude des domaines de discontinuité de la sphère nous donne des espaces intéressants. On sait que l'existence de points fixes, dans un mouvement de la sphère à  $n$  dimensions  $S^n$  sur elle-même, conservant

---

<sup>1</sup> Les indices supérieurs indiquent toujours la dimension et ne sont pas à confondre avec des exposants.

l'orientation, est liée à la parité de  $n$ . Tout mouvement sera à points fixes si  $n$  est pair. Dans ce cas le groupe facteur, du groupe des mouvements par rapport au plus petit sous-groupe contenant tous les mouvements à points fixes, sera formé d'un seul élément. Et en vertu du théorème énoncé plus haut, le groupe fondamental du domaine de discontinuité n'est également composé que de l'élément unité. Mais pour deux dimensions, seule la sphère parmi les surfaces closes possède ce groupe fondamental. Par conséquent, pour deux dimensions, les domaines de discontinuité des groupes de mouvement conservant l'orientation ne sont rien de neuf; ils sont tous homéomorphes à la sphère à deux dimensions. Le seul groupe de transformations métriques de la sphère à deux dimensions, sans points fixes, est d'ordre 2, et son seul élément différent de l'élément unité est la permutation des points diamétraux. C'est une transformation inversant l'orientation. Son domaine de discontinuité est donc une surface non-orientable, à savoir le plan projectif. Pour 3 dimensions les représentations de la sphère sur elle-même, inversant l'orientation, possèdent des points fixes. Par conséquent on n'obtiendra aucun nouveau domaine de discontinuité clos et *non-orientable* de l'espace sphérique. On sait d'une part que les groupes discontinus de mouvements de la sphère à 3 dimensions sont finis, et d'autre part que les espaces non-orientables à 3 dimensions ont des groupes fondamentaux infinis. On voit donc que les espaces non-orientables à 3 dimensions ne peuvent apparaître comme domaines de discontinuité de la sphère à 3 dimensions. D'ailleurs, les domaines de discontinuité des groupes de transformations de  $S^3$  inversant l'orientation ne sont pas même des variétés homogènes.

Il existe par contre des mouvements sans points fixes de  $S^3$  sur elle-même qui conservent l'orientation. Imaginons notre sphère comme sphère à 3 dimensions et de rayon 1, immergée dans l'espace euclidien  $R^4$ . Exprimée en coordonnées cartésiennes son équation aura la forme:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 .$$

Un mouvement sans points fixes sera donné, par exemple, par la transformation :

$$x'_1 = x_1 \cos 2\pi q/p - x_2 \sin 2\pi q/p$$

$$x'_2 = x_1 \sin 2\pi q/p + x_2 \cos 2\pi q/p$$

$$x'_3 = x_3 \cos 2\pi/p - x_4 \sin 2\pi/p$$

$$x'_4 = x_3 \sin 2\pi/p + x_4 \cos 2\pi/p .$$

Elle fait tourner le plan  $x_1 x_2$  de l'angle  $2\pi q/p$  et le plan  $x_3 x_4$  de l'angle  $\frac{2\pi}{p}$ . Nous supposons  $p$  et  $q$  entiers, premiers entre eux et satisfaisant à :  $0 \leq q < p$ . La transformation envisagée engendre un groupe cyclique de mouvements, groupe dont l'ordre est  $p$ . Tous ces mouvements sont sans points fixes, l'identité exceptée.

On peut se faire une idée du domaine de discontinuité en projetant la sphère stéréographiquement sur un hyperplan  $x_4 = 0$  avec le point  $(x_1 x_2 x_3 x_4) = (0 0 0 1)$  comme centre de projection. Ce plan  $x_4 = 0$  est un espace euclidien à 3 dimensions, dans lequel nous introduirons des coordonnées cartésiennes  $xyz$  de telle sorte que les axes  $xyz$  coïncident respectivement avec les axes  $x_1 x_2 x_3$ . Par la projection stéréographique nous imposons artificiellement à ce plan la métrique sphérique que la sphère avait reçue de l'espace à 4 dimensions dans lequel elle fut immergée. Au groupe des mouvements rigides de la sphère  $S^3$  sur elle-même correspond alors dans le plan  $x_4 = 0$  un groupe de « représentations sphériques » de cet espace<sup>1</sup>.

Les intersections de la sphère unité  $S^3$  avec les hyperplans, passant par l'origine de  $R^4$ , c'est-à-dire les grands « hypercercles » de la sphère unité, sont représentés sur des sphères diamétrales de la sphère unité. Ces sphères diamétrales sont les sphères qui coupent la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  suivant un grand cercle. Le groupe des représentations sphériques mentionné est caractérisé par le fait que l'application d'un de ses éléments ne fait que permuter les sphères diamétrales de la sphère unité.

L'intersection de la sphère unité avec le plan  $x_1 x_2$  est repré-

<sup>1</sup> Voir par ex. J. HADAMARD, Géométrie anallagmatique. *Nouv. Ann.* (6), 2, p. 257-270.

sentée sur le cercle unité du plan des  $xy$ , celle avec les plans des  $x_3 x_4$  est représentée sur l'axe des  $z$  qui possède dans la métrique sphérique la longueur  $2\pi$ . Un mouvement rigide de la sphère unité  $S^3$ , tel que seul le plan des  $x_1 x_2$  soit tourné d'angle  $\varphi$ , est donc représenté sur une rotation rigide du cercle unité du plan des  $xy$ . Cette rotation est une rotation rigide autour de l'axe des  $z$ . Considérons maintenant le mouvement de la sphère unité qui ne fait que tourner le plan des  $x_3 x_4$  d'un angle  $\varphi$ . Ce mouvement est représenté par la transformation qui n'a pour effet que de faire glisser l'axe des  $z$  sur lui-même de  $\varphi$ , grandeur mesurée sphériquement. Le cercle unité du plan des  $xy$  et l'axe des  $z$  ne se distinguent, sphériquement parlant, en aucune façon. Par une transformation sphérique du type considéré on peut même les transformer l'un dans l'autre. Un mouvement rigide de la sphère unité, faisant tourner simultanément les plans des  $x_1 x_2$  et des  $x_3 x_4$  d'un angle  $\varphi$ , est représenté par un « mouvement hélicoïdal sphérique » qui fait tourner le cercle unité sur lui-même et glisser l'axe des  $z$  d'une même grandeur  $\varphi$ . On peut donc choisir dans l'espace  $xyz$  comme domaine de discontinuité de notre groupe cyclique une lentille massive, limitée par deux calottes passant par le cercle unité du plan des  $xy$ , situées symétriquement par rapport à ce plan et formant entre elles l'angle  $\frac{2\pi}{p}$ . Le mouvement hélicoïdal dont nous avons parlé, ordonne deux à deux les points des deux calottes et ceci de la façon suivante: deux points correspondants s'obtiennent par une rotation de  $\frac{2\pi q}{p}$  autour de l'axe des  $z$  suivie d'une symétrie par rapport au plan équatorial de la lentille, le plan des  $xy$ . Si nous identifions deux points équivalents, la lentille devient le domaine de discontinuité clos qu'est *l'espace lenticulaire*  $(p, q)$ <sup>1</sup>. Deux points de l'arête de la lentille séparés par un arc de longueur  $\frac{2\pi}{p}$ , sont équivalents. Un tel arc représente donc dans l'espace lenticulaire clos une courbe fermée, qui pour la première fois sera un bord lorsqu'on l'aura parcourue  $p$  fois, à savoir le bord de la calotte.

<sup>1</sup> M. G. de Rham nomme « *espaces cycliques* » ce que j'appelle « *espaces lenticulaires* ».

Pour  $p = 1$  et  $p = 2$  on obtient deux espaces à trois dimensions bien connus, l'espace sphérique (sphère à 3 dimensions) et l'espace projectif. Dans ce dernier cas l'arête de la lentille est une droite projective parcourue deux fois et sur la lentille qui est une sphère on a à identifier les points diamétraux. On obtient ces deux espaces en fermant l'espace euclidien respectivement par un point infini et un plan infini. C'est par ce fait qu'ils revêtent toute leur importance, car dans ces espaces fermés les transformations conformes, ou projectives, sont biunivoques.

Pour un  $p$  quelconque on obtient un espace clos à 3 dimensions, dont le groupe fondamental est cyclique d'ordre  $p$ . Comme les groupes fondamentaux sont des invariants topologiques, deux espaces lenticulaires issus de  $p$  différents, sont différents. C'est un problème des plus difficiles que de dire quand deux espaces de même  $p$  mais de  $q$  différents sont homéomorphes ou non. Ce problème vient d'être résolu par M. Reidemeister à l'aide de nouveaux invariants; nous y reviendrons.

Donnons encore deux exemples de domaines de discontinuité à 3 dimensions. Prenons un dodécaèdre massif, qui est un espace à 3 dimensions bordé. On en fait une variété close par l'identification suivante: On identifie deux pentagones parallèles par un mouvement hélicoïdal le long de la droite joignant leurs centres. La rotation de ce mouvement est de  $\frac{\pi}{5}$  et son orientation la même pour toutes les paires de pentagones. On obtient une variété homogène, l'espace dodécaédrique sphérique. Il apparaît aussi comme domaine de discontinuité d'un groupe de mouvements sans points fixes de l'espace sphérique à 3 dimensions. Le calcul de ses coefficients de torsion montre que c'est un espace de Poincaré et qu'il a par conséquent les mêmes groupes d'homologie que la sphère à 3 dimensions. Le groupe de mouvements, dont il est le domaine de discontinuité, est aussi son groupe fondamental, puisqu'il n'y a pas de points fixes. C'est le groupe icosaédrique binaire d'ordre 120. On obtient un domaine de discontinuité de l'espace hyperbolique, l'espace dodécaédrique hyperbolique, par le procédé d'identification déjà employé, où l'on remplace



la rotation de  $\frac{\pi}{5}$  par une rotation de  $\frac{3\pi}{5}$ . Son groupe fondamental est infini comme celui de tout domaine de discontinuité d'un groupe de mouvements sans points fixes de l'espace hyperbolique. Il n'a pas de nombre de Betti, mais trois coefficients de torsion égaux de valeur 5.

L'instrument le plus puissant pour caractériser, du point de vue topologique, les domaines de discontinuité à 3 dimensions de l'espace sphérique, est la théorie des *espaces fibrés*. La raison est qu'il existe pour tout groupe discontinu  $\mathfrak{H}$  de mouvements rigides de l'espace sphérique, un groupe continu  $\mathfrak{K}$  à un seul paramètre et qui est permutable avec chaque élément  $h$  de  $\mathfrak{H}$ :

$$h \mathfrak{K} h^{-1} = \mathfrak{K} .$$

Les mouvements rigides du groupe  $\mathfrak{H}$  conservent l'ensemble des trajectoires de  $\mathfrak{K}$  et ne font que les échanger entre elles. Il s'en suit que le domaine de discontinuité de  $\mathfrak{H}$  est fibré par les trajectoires de  $\mathfrak{K}$ .

Je vais m'occuper maintenant des espaces fibrés et donner d'abord un exemple montrant l'importance des variétés fibrées.

Prenons une courbe de l'espace euclidien fermée et possédant deux dérivées continues. En un point de cette courbe les extrémités des normales unitaires forment un cercle. Si nous choisissons l'unité de longueur suffisamment petite, l'ensemble de ces cercles engendre une sorte de tore. Cette surface est fibrée par les cercles; nous l'appellerons la *variété-voisinage* de la courbe gauche. Il est clair que nous avons le produit de la courbe gauche et du cercle.

Passons à un espace dont la dimension est plus grande d'une unité. Considérons une surface possédant deux dérivées continues et immergée dans  $R^4$ . Elevons encore les normales unitaires en un point quelconque. Leurs extrémités formeront de nouveau un cercle. Mais cette fois les cercles engendrent une variété-voisinage à 3 dimensions, qui est un espace à 3 dimensions fibré par les cercles. On peut démontrer que cet espace fibré est ici encore le produit topologique de notre surface et du cercle. Une conséquence de cet état de choses est que toute surface de l'espace à 4 dimensions possédant deux dérivées continues,

peut être transformée en une surface algébrique par une déformation arbitrairement petite. Il existe dans les espaces de dimensions supérieures à 4 des exemples, où la variété-voisinage n'est plus le produit topologique de la variété immergée et d'une sphère, qui dans le cas général est à plus de une dimension. Ici il n'est donc plus possible de conclure à la déformabilité en variété algébrique. Par exemple le plan projectif complexe, variété à 4 dimensions, ne peut être immergé dans aucun espace euclidien, de telle sorte que la variété-voisinage soit ce produit topologique<sup>1</sup>.

Que sait-on des espaces fibrés en général et comment peut-on les construire ? F i b r e r l ' e s p a c e euclidien à  $n$  dimensions par des hyperplans parallèles de dimension  $f$ , c'est le remplir simplement et sans lacunes par les hyperplans. Ceci posé, une variété à  $n$  dimensions et close sera dite *fibrée- $f$*  quand elle remplira les conditions suivantes :

1° Les points de la variété se répartissent sur des variétés de dimension  $f$ , les *fibres*, de telle sorte que par chaque point passe une et une seule fibre ;

2° Chaque point possède un voisinage qu'on peut représenter topologiquement et en conservant les fibres sur un voisinage d'un point de l'espace euclidien à  $n$  dimensions fibré- $f$ . (Cette condition peut être appelée la « fibrabilité » locale).

Cette notion est, il est vrai, bien trop générale pour en tirer des résultats.

Nous exigerons donc :

3° Les fibres sont des s p h è r e s à  $f$  dimensions, et (au lieu de 2) nous exigerons la fibrabilité globale ;

4° Toute fibre possède un voisinage de fibres, qu'on peut représenter topologiquement en conservant les fibres sur le produit topologique fibré d'une sphère à  $f$  dimensions et d'un élément à  $(n - f)$  dimensions. Nous poserons  $n - f = d$ .

Dans ce cas les fibres elles-mêmes forment, sous certaines conditions, une variété à  $d$  dimensions. C'est la « *variété de décomposition* » de la fibration.

Nous avons maintenant devant nous un problème de géométrie abordable et qui peut se poser comme suit : *Construire tous les*

<sup>1</sup> Cet exemple a été traité par M. E. STIEFEL.

espaces fibrés à  $n$  dimensions, dont on connaît la variété de décomposition de dimension  $d$ .

Le problème peut être résolu complètement pour les cas suivants: 1<sup>o</sup> La variété de décomposition est à une, deux ou trois dimensions et la fibre une sphère de dimension quelconque. 2<sup>o</sup> La variété de décomposition est de dimension arbitraire et la fibre à une dimension. Dans le cas  $d = 2$ ,  $f = 1$ , donc  $n = 3$ , on obtient pour toute surface close un nombre infini d'espaces fibrés de dimension 3, espaces complètement caractérisés par la surface de décomposition et un nombre entier non négatif  $b$ . Pour  $b = 0$  on a le produit topologique de la surface de décomposition et du cercle. Pour  $b > 0$  on a un espace possédant un coefficient de torsion égal à  $b$ . Si la surface de décomposition est la sphère, on obtient certains espaces lenticulaires qui sont fibrés (sans fibre singulière) et dont le groupe fondamental est cyclique d'ordre  $b$ .<sup>1</sup>

Le problème des espaces fibrés s'énonce dans toute sa généralité: Déterminer tous les espaces fibrés qu'on ne peut pas représenter topologiquement l'un sur l'autre en conservant les fibres.

Sous cette forme le problème est comparable au problème d'homéomorphie, mais il est plus facilement abordable. Il est vrai que la solution du problème énoncée, n'apporterait pas la solution du problème d'homéomorphie. Ceci parce qu'il arrive que des espaces topologiquement équivalents ne peuvent être représentés l'un sur l'autre en conservant les fibres. De plus il existe des espaces qu'on ne peut même pas recouvrir de fibres. La théorie des espaces fibrés a cependant fait progresser la topologie des variétés de points à trois dimensions.

Il est vrai qu'on opère alors avec une généralisation de la notion d'espace fibré, notion qu'il n'est pas aisé d'étendre à plus de 3 dimensions. On doit permettre l'existence de *fibres singulières* autour desquelles les fibres voisines s'enroulent plusieurs fois. Plus exactement, un espace fibré est une variété close à 3 dimensions dont les points se groupent en courbes fermées, les fibres. Par chaque point passe une et une seule fibre.

<sup>1</sup> Voir aussi: H. WHITNEY, Sphere-Spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 21 (1935), p. 464-468.

Toute fibre possède un voisinage de fibres, c'est-à-dire un sous-ensemble de fibres qu'on peut représenter topologiquement et en conservant les fibres sur un tore massif fibré. On obtient un tore massif fibré de la manière suivante: On part d'un cylindre circulaire massif, dont les fibres sont les segments parallèles à l'axe. On identifie alors les deux bases après les avoir fait tourner de  $2\pi \frac{\nu}{\mu}$  l'une par rapport à l'autre.  $\mu$  et  $\nu$  sont deux nombres entiers premiers entre eux satisfaisant à  $0 \leq \nu < \mu$ . Si  $\nu = 0$ , la fibre axiale est dite régulière, sinon elle est singulière, avec les nombres caractéristiques  $\mu$  et  $\nu$ . Parmi les espaces fibrés définis de cette façon, se trouvent plusieurs espaces importants, déjà connus par ailleurs.

Pour les espaces fibrés il est possible d'établir complètement le système des invariants des transformations topologiques conservant les fibres. On pourra donc dire, quand deux de ces espaces donnés peuvent être représentés l'un sur l'autre en conservant les fibres. S'il est possible de le faire pour deux espaces donnés, ceux-ci seront, à plus forte raison, homéomorphes. On peut aussi montrer que si des espaces de Poincaré, la sphère  $S^3$  exceptée, sont susceptibles d'être fibrés, ils ne le sont que d'une seule manière. Il s'en suit que les espaces de Poincaré fibrés sont univoquement caractérisés par leurs invariants de fibration. Par exemple l'espace dodécaédrique sphérique et le premier espace de Poincaré, découvert par Poincaré lui-même, peuvent être fibrés. Puisque les invariants de fibration, dont nous avons parlé plus haut, sont les mêmes pour les deux espaces, ceux-ci sont homéomorphes. Il est peu probable qu'on eût atteint ce résultat sans la théorie des espaces fibrés. On peut démontrer de plus que l'espace dodécaédrique sphérique est le seul espace de Poincaré à groupe fondamental fini, et que la sphère à 3 dimensions est le seul espace susceptible d'être fibré et dont le groupe fondamental ne contienne que l'élément unité. La sphère à 3 dimensions est donc le seul espace simplement connexe susceptible d'être fibré.

On a étudié récemment des espaces fibrés à 3 dimensions qui outre les fibres possèdent encore des *lignes de tourbillons*<sup>1</sup>. On

<sup>1</sup> W. HANTZSCHE u. H. WENDT. Dreidim. wirbelgefasserte Räume. *Math. Zeitschr.* 40 (1936).

les obtient à partir des espaces fibrés ordinaires en enlevant les fibres d'un tore massif fibré. On engendre ainsi une variété dont le bord est un tore fibré. Prenons maintenant un cylindre massif fibré possédant une ligne de tourbillons; c'est un cylindre fibré par les trajectoires du groupe des rotations autour de son axe. C'est son axe qui est la ligne de tourbillons. Nous obtenons par l'identification des deux bases un tore massif fibré à l'intérieur duquel se trouve une ligne de tourbillons fermée. Sa surface est un tore fibré, qu'on peut représenter topologiquement et en conservant les fibres sur le bord de la variété décrite plus haut. En identifiant les points correspondants on obtient encore un espace clos fibré et possédant une ligne de tourbillons. Si l'on recherche le système complet des invariants de tous les espaces fibrés possédant une ligne de tourbillons, on arrive à un résultat des plus étonnants. Les espaces fibrés sans ligne de tourbillons nous avaient conduits à une foule d'exemplaires intéressants: les domaines de discontinuité sphériques, beaucoup d'espaces dérivés des nœuds et une infinité d'espaces de Poincaré. La présence d'une ligne de tourbillons rend triviale la structure topologique des espaces. On a alors la somme topologique d'espaces lenticulaires et de deux autres espaces de structure également fort simple, désignés par anse à 3 dimensions orientable et non-orientable.

Le diagramme de HEEGAARD est un autre procédé pour construire des espaces à 3 dimensions. Mais le problème de trouver tous les diagrammes de Heegaard tracés sur une surface donnée n'est résolu à l'heure actuelle que pour le tore. Dans ce cas on retombe sur les espaces lenticulaires et sur le produit topologique de la sphère et du cercle. Pour une surface de genre  $h = 2$  on ne connaît que des exemples de diagrammes de Heegaard. Parmi ceux-ci se trouve un diagramme, trouvé par Poincaré, de l'espace dodécaédrique sphérique.

Pour nous rapprocher de la solution du problème d'homéomorphie, nous n'avons envisagé jusqu'à maintenant que quelques procédés de construction et nous nous sommes bornés à des classes restreintes de variétés. Pour terminer, j'aimerais indiquer une autre voie qui consiste à chercher des invariants, calculables pour une variété quelconque.

Je laisse de côté le groupe fondamental et les groupes d'homologie, ainsi que les invariants d'enlacement que M. Seifert a déjà employés lors de sa conférence. Je me borne aux invariants nouveaux de M. Reidemeister qui résolvent le problème d'homéomorphie des espaces lenticulaires. Pour exposer cette méthode, considérons un espace clos à 3 dimensions, subdivisé en cellules orientées. Les cellules seront :

$$a_{\mu}^k$$

$k$  indique la dimension et prend les valeurs 0 1 2 3;  $\mu$  est l'indice du simplexe et varie de 1 à  $\alpha^k$ , où  $\alpha^k$  est le nombre de simplexes de dimension  $k$ . Formons, comme en homologie, des chaînes de cellules

$$u^k = \sum_{\mu} \lambda_{\mu} a_{\mu}^k,$$

où les  $\lambda_{\mu}$  sont entiers. Les chaînes forment un groupe abélien libre qui est engendré par autant d'éléments qu'il y a de cellules à  $k$  dimensions dans la variété.

Passons maintenant à la variété de recouvrement universelle et calquons sur elle la subdivision en cellules données.

Soient  $f_1 f_2, \dots$ , les éléments du groupe fondamental et en même temps les mouvements de superposition de la variété de recouvrement universelle. Choisissons un domaine de discontinuité et désignons ses cellules par les mêmes symboles  $a_{\mu}^k$ . Les chaînes du recouvrement universel peuvent s'écrire sous la forme

$$\sum_{\mu v} \lambda_{\mu v} f_v a_{\mu}^k.$$

Les coefficients  $\lambda_{\mu v}$  sont des entiers et les coefficients de  $a_{\mu}^k$ , à savoir  $\gamma_{\mu} = \sum \lambda_{\mu v} f_v$ , forment ce qu'on appelle un *groupe-anneau* (Gruppenring), et ils se composent en respectant les règles de multiplication du groupe fondamental.

On peut considérer le groupe des chaînes à  $k$  dimensions de la variété de recouvrement universelle comme un *groupe avec opérateurs*. Ce groupe est engendré par les  $a_{\mu}^k$  et le domaine des opérateurs est le groupe-anneau.

A chaque chaîne correspond une frontière et les frontières sont entièrement données dans la variété fondamentale par les

relations d'incidence

$$\text{Rd } a_\mu^k = \sum_v \varepsilon_{\mu v}^{k-1} a_v^{k-1} ;$$

où  $\varepsilon_{\mu v}^{k-1}$  prend les valeurs 0, + 1 ou - 1. Ces relations d'incidence se calquent également sur la variété de recouvrement et elles y prennent la même forme; cependant  $\varepsilon_{\mu v}^{k-1}$  représente maintenant un élément du groupe-anneau.

Du point de vue purement algébrique, les relations d'incidence fournissent une représentation homéomorphe du groupe des chaînes à  $k$  dimensions sur le groupe des chaînes à  $k - 1$  dimensions: à chaque chaîne de dimension  $k$  il faut faire correspondre sa chaîne frontière à  $k - 1$  dimensions. L'ensemble de ces quatre groupes de chaînes à  $k$  dimensions ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) avec les relations d'incidence est appelé: *anneau d'homotopie*.

On peut dès lors entrevoir comment l'anneau d'homotopie se transforme lorsqu'on subdivise les cellules. L'ensemble de tous les anneaux d'homotopie qu'on obtient par subdivision ou par l'opération inverse de l'espace donné est évidemment un invariant de l'espace considéré.

Jusqu'ici nous n'avons fait que définir cet invariant. Mais définir un invariant sans donner le moyen de le calculer, c'est émettre des billets sans couverture. Pourtant, dans le cas d'un groupe fondamental cyclique on réussit à en tirer des invariants numériques calculables et qui permettent de distinguer les espaces lenticulaires.

\* \* \*

Au cours de la discussion M. G. de RHAM a donné une méthode de calcul qui est valable pour les espaces lenticulaires à  $n$  dimensions. Elle est intéressante par le fait qu'elle applique des théorèmes modernes d'algèbre. La place me manque pour en donner un exposé ici. Je dois me borner à renvoyer le lecteur à une conférence de M. de Rham au Congrès de topologie de Moscou et à une publication du même auteur qui paraîtra sous peu.

On trouvera la *bibliographie* des questions traitées ci-dessus dans les cours de topologie de SEIFERT-THRELFALL (Leipzig, 1934) et de ALEXANDROFF-HOPF (Berlin, 1936).