V. — Le caractère analytique des solutions.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

La solution de ce problème s'écrit ainsi:

$$u(x, y) = \left[\vartheta_3(0, y) + 1\right] * \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, y\right),$$

et l'identification des deux expressions pour u donne la relation

$$\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, y\right) * \left[\vartheta_3(0, y) + 1\right] + \frac{\partial \vartheta_2\left(\frac{x}{2}, y\right)}{\partial x} * \left[2y\,\vartheta_3(0, y) + 1\right] = 0 .$$

Pour $x \to 0$ cette relation se transforme en une équation intégrale pour $\vartheta_3(0, y)$:

$$\vartheta_3(0, y) * \left[\vartheta_3(0, y) + 1\right] - 2y\,\vartheta_3(0, y) - 1 = 0$$

indiquée par F. Bernstein (Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion. *Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, 1920, pp. 735-747). Pour d'autres exemples et pour une autre méthode de gagner de telles relations transcendantes par des transformations fonctionnelles, voir Doetsch [11].

V. — Le caractère analytique des solutions.

1. — Weierstrass [1] a montré en 1885 que la solution dans le demi-plan $y > 0$ de l'équation (1,21) de la chaleur avec les valeurs $\Phi(x)$ sur la frontière $y = 0$, représente sur chaque horizontale une fonction entière analytique en x. Plus explicitement: La solution donnée par la formule classique de Poisson

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x - \xi, y)\, \Phi(\xi)\, d\xi, \qquad (5, 1)$$

où χ désigne la fonction (3,331), a cette propriété. A cause de nos expériences sur la multiplicité des solutions nous nous trouvons obligés de nous servir de cet énoncé plus prudent. Weierstrass établit la même propriété pour la solution (1,23), si les températures $A(y)$ et $B(y)$ s'annulent.

Holmgren montra en 1905 ([1] et plus explicitement dans [3]) qu'une solution *régulière* (voir p. 50) de (1,21) représente sur chaque horizontale une *fonction analytique de* x; d'une manière plus précise: soit $u(x, y)$ une solution de (1,21), régulière dans un domaine $\mathfrak{D}$ et supposons le segment $x = x_0$, $a \leqq y \leqq b$ entièrement intérieur à $\mathfrak{D}$. Alors, dans un certain rectangle

$$|x - x_0| < d \,, \qquad a \leqq y \leqq b$$

u est développable en série de puissances

$$u(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu(y)}{\nu!} (x - x_0)^\nu \,.$$

Cette série a donc sur chaque horizontale $y =$ const. un rayon de convergence égal au moins à d.

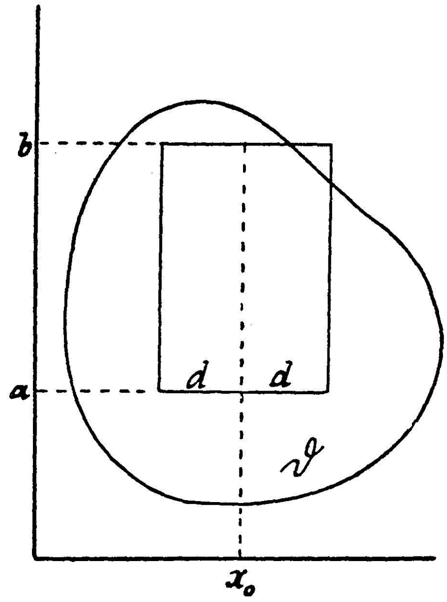

Fig. 4.

2. — Holmgren [1] donna à ce résultat une interprétation inattendue et très importante. Tout d'abord, comme toutes les dérivées par rapport à x existent, il découle de $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que toutes les dérivées par rapport à y existent aussi et satisfont aux relations:

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = \frac{\partial^n u}{\partial y^n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial u}{\partial x} \,.$$

Puisqu'on a

$$c_\nu(y) = \left. \frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu} \right|_{x=x_0} ,$$

il en résulte: En posant

$$u \big|_{x=x_0} = \varphi(y) \,, \qquad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \varphi_1(y)$$

on trouve

$$c_{2n}(y) = \varphi^{(n)}(y) \,, \qquad c_{2n+1}(y) = \varphi_1^{(n)}(y)$$

de façon que la solution a la même forme que pour le problème de Cauchy dans le cas analytique connu:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(y)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(n)}(y)}{(2n+1)!}(x - x_0)^{2n+1} . \quad (5, 21)$$

D'après les inégalités de Cauchy pour les coefficients on a

$$\frac{|c_n|}{n!} \leqq \frac{M}{d^n},$$

où M est la borne supérieure de u dans le rectangle, et par conséquent

$$|\varphi^{(n)}(y)| \leqq M \frac{(2n)!}{d^{2n}}, \qquad |\varphi_1^{(n)}(y)| \leqq M \frac{(2n+1)!}{d^{2n+1}} . \quad (5, 22)$$

Cela signifie qu'une solution régulière représente sur chaque segment *vertical* entièrement intérieur au domaine de régularité, une fonction $\varphi(y)$ *dérivable un nombre illimité de fois et dont les dérivées admettent les majorantes* (5,22), avec les valeurs M et d indépendantes de y. (La même chose a lieu pour $\frac{\partial u}{\partial x}$).

3. — Les remarques suivantes se rattachent immédiatement à ce dernier fait:

1. A côté de l'inégalité (5,22) pour $\varphi^{(n)}(y)$ on envisagera celle pour les dérivées d'une fonction *analytique* $f(y)$:

$$|f^{(n)}(y)| \leqq M \frac{n!}{\rho^n} . \quad (5, 31)$$

Mais une fonction pour laquelle (5,22) est valable, n'est pas nécessairement analytique et même pas, comme l'on pourrait croire, *quasi-analytique* dans le sens de Carleman. Car alors ses valeurs sur un petit intervalle devraient définir d'une manière univoque la répartition de ses valeurs partout. Or la solution (3,61) nous montre qu'en général ce n'est pas le cas pour φ. C'est que, si nous remplaçons $A(y)$ pour $y > y_0$ par une autre fonction, u conserve bien sa valeur pour $0 < y \leqq y_0$, mais ne la conserve pas pour $y > y_0$.

2. Les deux inégalités (5,22) et (5,31) conduisent à envisager d'une *manière plus générale* (Holmgren [3]) des fonctions $f(z)$, dérivables une infinité de fois dans un intervalle et satisfaisant dans cet intervalle à l'inégalité

$$|f^{(n)}(z)| \leqq \mathrm{M}\frac{\Gamma(\alpha n+1)}{\rho^n},$$

qui est équivalente à

$$|f^{(n)}(z)| \leqq \mathrm{M}\frac{(n\,!)^\alpha}{r^n},$$

avec $\alpha \geqq 1$. Gevrey ([1], chap. III, et [2]) appelle ces fonctions *fonctions $\mathfrak{H}$ de la classe α.* A l'exception de la classe $\alpha = 1$, qui donne les fonctions analytiques, elles ne sont pas même quasi-analytiques, comme nous le montre l'exemple

$$f(z) = \int_0^z \Phi(\eta)\, e^{-\frac{1}{(z-\eta)^\beta}}\, d\eta \qquad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{\alpha-1}$$

(Holmgren [3], p. 5).

3. Gevrey [2] a étendu la notion de classe pour des *fonctions à un nombre arbitraire de variables.* Après que E. E. Levi ([3], § 9) eut démontré pour l'équation non homogène de la chaleur que z restait analytique en x au voisinage d'un point où $f(x, y)$ était analytique en x, Gevrey [2] montra pour l'équation linéaire la plus générale et d'autres équations très générales que, en gros, les propriétés de classe de l'équation se transmettaient aussi aux solutions. Ce serait trop long de vouloir reproduire ici ces résultats d'une très grande portée.

VI. — L'existence de la solution.

Un théorème d'unicité énonce seulement qu'il y a *au plus* une solution. C'est un théorème d'existence qui doit décider si *en vérité* il y en a une.

Le problème de Cauchy.

Dans le cas *analytique* l'existence de la solution est toujours assurée, mais c'était un des premiers résultats des travaux