

QUELQUES PROBLÈMES DE LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS CONTINUES

Autor(en): **Hopf, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-27320>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

QUELQUES PROBLÈMES
DE LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS
CONTINUES ¹

PAR

H. HOPF (Zurich).

1. — Comme but des recherches topologiques on assigne souvent l'étude d'une certaine classe de propriétés concernant *la forme et la position des figures géométriques*, propriétés qui sont invariantes pour les représentations topologiques, c'est-à-dire biunivoques et continues dans les deux sens. C'est bien la définition usuelle, mais elle n'est certainement pas complète. Car ce sont non seulement les propriétés des figures géométriques qui doivent être étudiées, mais aussi les propriétés des représentations topologiques ou, plus généralement, des *représentations univoques et continues* elles-mêmes. Comme les figures, *ces représentations elles-mêmes* aussi forment un domaine important et fécond pour les recherches des topologues — il suffit de nous rappeler les conférences intéressantes que nous entendîmes dernièrement de MM. DE KERÉKJÁRTÓ et NIELSEN, ainsi que quelques travaux classiques de M. BROUWER. L'indication de cette distinction de deux parties différentes de la topologie n'entraîne heureusement pas de scission de notre science en deux branches particulières qui seraient peu liées entre elles; tout au contraire, il existe entre elles des rapports étroits: par

¹ Conférence faite le 25 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

exemple, les propriétés de toutes les représentations d'un espace P en un autre espace fixe Q — c'est-à-dire les propriétés de l'« espace (abstrait) des représentations » Q^P — sont en même temps, comme M. KURATOWSKI nous l'a rappelé, des propriétés de P même, qui donnent des renseignements importants sur la forme de P .

Je voudrais exposer ici ces rapports entre la « topologie des représentations » et la « topologie de la forme » et cela en traitant deux catégories de problèmes: une première catégorie se rapportant à la possibilité de *comparer* entre elles les formes de deux espaces ¹ P et Q en considérant les représentations de P sur Q et celles de Q sur P , une seconde concernant les relations entre la forme d'un espace P et les *représentations de P sur lui-même* ².

2. — Avant d'aborder le premier de ces points, celui de la comparaison de deux espaces par leurs représentations réciproques, j'introduirai une notion qui a fait ses preuves en ces matières: la représentation f de l'espace P sur l'espace Q sera dite « *essentielle* » si pour chaque modification continue de la représentation f , *tout* l'espace Q reste image de P ; en d'autres termes, s'il est impossible de libérer une partie de Q du recouvrement par l'image de P , par une modification continue de la représentation f .

En faisant des hypothèses très générales sur P et Q il est possible de représenter ces espaces l'un sur l'autre d'une manière continue; mais sous quelles conditions existe-t-il une représentation *essentielle* de P sur Q ? On montre par exemple facilement que toute surface close peut être représentée essentiellement sur la surface sphérique, tandis que chaque représentation d'une surface sphérique sur une surface close et orientable de genre supérieur est non-essentielle. Ce dernier fait est un cas particulier du théorème plus général suivant: P et Q étant des variétés closes et orientables à n dimensions, une condition

¹ Par un « espace » nous entendons toujours un espace *métrique*.

² Par une « représentation » nous entendons toujours une représentation univoque et continue. Nous appelons f une représentation de P en Q si l'image $f(P)$ est sous-ensemble de Q ; si l'on a, en particulier, $f(P) = Q$, alors f sera dite une représentation de P sur Q .

nécessaire pour que P soit représentable essentiellement sur Q, est l'existence des relations suivantes

$$p^r \geq q^r, \quad r = 1, 2, \dots, n - 1,$$

où p^r et q^r désignent les r -ièmes nombres de Betti de P et Q [13]¹.

Ce théorème, bien entendu, est valable pour des *variétés closes de la même dimension*; les exemples suivants montreront qu'il ne peut pas, sans autre, être étendu à des paires plus générales d'espaces P et Q: une circonférence P peut évidemment être représentée essentiellement sur une lemniscate Q, bien qu'on ait $p^1 = 1$, $q^1 = 2$; il existe aussi des représentations essentielles de la sphère à trois dimensions P sur la sphère à deux dimensions Q, bien qu'on ait $p^2 = 0$, $q^2 = 1$ [16]. Je crois cependant qu'une loi plus générale se manifeste par le théorème précité, une loi dont le contenu exact et le domaine de validité ne sont pas encore connus, mais qui pourrait s'énoncer à peu près de la façon suivante: si l'espace P a, dans un certain sens, une structure topologique « plus simple » que l'espace Q, alors P n'est pas représentable essentiellement sur Q. Mais la détermination exacte du sens de la notion de « simplicité » qui intervient ici nous manque encore. C'est précisément ici l'un des problèmes principaux que j'ai en vue. Nous indiquerons dans la suite (n° 5, n° 7) d'autres apparitions de la même loi.

3. — Restons-en pour l'instant aux variétés closes à n dimensions P et Q; alors le fait qu'une représentation de P sur Q est essentielle équivaut au fait que le *degré* de cette représentation n'est pas nul [23; 11]; et l'on peut joindre au théorème susmentionné sur les représentations essentielles d'autres théorèmes sur le degré de représentation qui sont, en partie, plus précis:

M. H. KNESER a démontré la formule suivante pour $n = 2$, c'est-à-dire pour les surfaces closes, où c désigne le degré d'une représentation de P sur Q et p, q les genres de P, Q [24]:

$$p - 1 \geq |c| \cdot (q - 1) \quad (\text{pour } p > 0).$$

¹ Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie qui se trouve à la fin de cet exposé.

D'autre part, comme il existe des représentations pour tout c satisfaisant à l'inégalité de M. Kneser, cette formule donne d'amples renseignements sur le rapport entre les propriétés de la forme de P et Q , d'une part, et les représentations possibles de l'autre.

On ne connaît pas de théorème aussi précis pour les dimensions supérieures. On connaît cependant certaines propriétés des variétés closes et orientables à n dimensions, par exemple le fait que voici: si l'on peut représenter, avec le degré 1, P sur Q , ainsi que Q sur P , alors tous les invariants d'homologie — les groupes de Betti et l'anneau d'intersection de M. Alexander — coïncident pour P et Q [13]. Le problème reste ouvert de savoir si deux variétés, représentables l'une sur l'autre avec le degré 1, sont aussi homéomorphes. Ce problème est d'ailleurs étroitement apparenté avec cet autre problème, posé par MM. KURATOWSKI et ULAM [25] et resté ouvert lui aussi: soient P et Q des variétés closes et supposons qu'il existe, pour chaque ε positif, une représentation f telle que l'ensemble $f^{-1}(q)$ pour chaque point q de Q ait un diamètre inférieur à ε ; P et Q sont-elles alors homéomorphes ?

Le théorème indiqué plus haut, sur la possibilité des représentations réciproques avec le degré 1, mérite une attention particulière dans le cas où Q est la sphère S^n à n dimensions. On voit aisément que chaque variété (close et orientable) à n dimensions P peut être représentée sur S^n avec le degré 1; l'énoncé du théorème est alors le suivant: si l'on peut représenter S^n sur P avec le degré 1, alors P a les mêmes invariants d'homologie que la sphère S^n ; et il est facile de montrer que, en plus, le groupe fondamental de P disparaît lui aussi [11, théor. VIII]. La fameuse hypothèse de POINCARÉ dit que la sphère S^n se distingue de toutes les autres variétés closes à n dimensions par le fait que le groupe fondamental ainsi que tous les r -ièmes groupes de Betti (pour $1 \leq r \leq n - 1$) disparaissent; si cette hypothèse est exacte, alors P aussi est homéomorphe à la sphère. On voit que la justesse de l'hypothèse de Poincaré entraînerait aussi celle de l'hypothèse suivante, énoncée par M. KNESER (en rapport avec certaines recherches sur l'axiomatique des variétés) [22, p. 10]: « La seule variété close à n dimen-

sions sur laquelle la sphère à n dimensions peut être représentée avec le degré 1, est la sphère elle-même ». Dernièrement, M. HUREWICZ a annoncé une démonstration du fait que, inversement, l'hypothèse de Poincaré découle de celle de M. Kneser, que les deux sont, par conséquent, équivalentes [21].

4. — Je tiens d'ailleurs à faire observer que cette remarque de M. Hurewicz doit être placée dans le cadre de ses recherches systématiques sur les représentations des sphères S^n en un espace Q : celles-ci forment le noyau de sa nouvelle théorie des « groupes d'homotopie à un nombre supérieur de dimensions » [20; 21]; cette théorie semble représenter un progrès très important dans le domaine dont je parle ici. Malheureusement, je ne connais pas encore cette théorie assez à fond pour pouvoir l'exposer ici; je n'indiquerai par la suite qu'un de ses beaux théorèmes (N° 8).

5. — Par contre, depuis quelques années, les représentations d'un espace P en la sphère S^n ont été employées pour examiner P lui-même et cela a donné des résultats satisfaisants dans le cas où P est à n dimensions lui aussi. J'ai pu montrer pour commencer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polyèdre à n dimensions P puisse être représenté essentiellement sur S^n est qu'il contienne un cycle à n dimensions (d'un domaine de coefficients quelconque) différent de zéro [14; 15; 2, p. 514]. Ce théorème fut étendu par M. ALEXANDROFF à des espaces compacts arbitraires [1, p. 223]. M. FREUDENTHAL enfin a porté ces recherches à leur achèvement en démontrant le fait suivant: les propriétés d'homologie à n dimensions d'un espace compact à n dimensions P sont équivalentes aux propriétés des classes d'homotopie des représentations de P en la sphère S^n ; comme M. Freudenthal l'a montré, ces classes d'homotopie peuvent en effet être conçues comme éléments d'un groupe, et ce groupe, d'une part, le n -ième groupe de Betti de P de l'autre, se déterminent réciproquement d'une façon univoque [9].

Le théorème que voici de M. BORSUK mérite aussi d'être mentionné dans cet ordre d'idées, et cela autant à cause de son intuitive simplicité qu'à cause de sa démonstration élémentaire: P étant un ensemble fermé et borné de l'espace euclidien à

$n + 1$ dimensions R^{n+1} , il partage R^{n+1} et ne le partage que s'il existe une représentation essentielle de P sur S^n [3; 2, p. 405]¹.

6. — Ce théorème dépasse un peu le cadre des théorèmes précités: ici la dimension de P peut être supérieure à n , à savoir égale à $n + 1$ (il est vrai que cette différence s'affaiblit du fait que P se trouve dans R^{n+1}). En général, on est peu renseigné sur la signification des représentations d'un espace P , à dimension supérieure à n , sur la sphère à n dimensions; les efforts pour caractériser aussi par ces représentations les groupes de Betti inférieurs de P , sont restés jusqu'à présent sans succès.

C'est uniquement dans le cas $n = 1$ qu'on peut, dans les théorèmes précités, renoncer à l'hypothèse que P aussi est à n dimensions: j'avais démontré qu'un polyèdre de dimension *arbitraire* peut être représenté essentiellement sur la circonférence, et ne peut l'être que si son premier nombre de Betti est non nul [16, théor. Va; 2, p. 518]. M. BORSUK a étendu ce théorème aux espaces compacts arbitraires [4], et en même temps M. BRUSCHLINSKY a démontré le fait suivant: on peut déterminer le premier nombre de Betti d'un espace compact P à partir du groupe des classes des représentations de P en un cercle S^1 [7] — de la même manière que, d'après le théorème de M. Freudenthal, cela peut se faire pour le nombre de Betti le plus élevé de P par les représentations de P en la sphère de dimension correspondante.

Par contre, le rôle joué par les représentations d'un espace P à N dimensions sur les sphères des dimensions $n = 2, 3, \dots, N - 1$ est encore totalement obscur, même pour le cas des polyèdres. D'une part il semble, déjà pour $r = 2$, extrêmement douteux qu'on puisse représenter essentiellement sur S^r chaque polyèdre P dont le r -ième nombre de Betti est positif²; d'autre part il est certain que des représentations essentielles de P sur S^2 peuvent

¹ On pourrait poser le problème de caractériser aussi des propriétés plus générales des ensembles ponctuels de l'espace R^{n+1} par des représentations sur S^n . M. KURATOWSKI m'a indiqué dernièrement que ce problème fut traité avec le plus grand succès par M. EILENBERG pour le cas $n = 1$: dans un mémoire à paraître prochainement M. Eilenberg construit presque toute la topologie des ensembles ponctuels plans sur la base des représentations sur la circonférence [8].

² Une telle représentation est possible si la dimension de P n'est pas supérieure à $r + 1$ [16, théor. VII].

exister, même si le deuxième nombre de Betti disparaît: cela a lieu par exemple si P est la sphère à trois dimensions S^3 [16].

La question de savoir si la sphère S^N peut être représentée essentiellement sur la sphère S^n pour un couple donné N, n (avec $N > n > 1$) est encore ouverte; j'ai pu y répondre pour les cas particuliers $N = 4k - 1, n = 2k, k = 1, 2, \dots$ et cela par l'affirmative [17]¹. Je considère, pour ma part, la réponse générale à cette question comme une tâche des plus importantes et des plus attrayantes: non seulement en ce qui concerne la théorie, mais aussi parce que nous devrions connaître complètement et sous chaque point de vue des figures aussi simples et aussi importantes que les sphères!

7. — Nous venons de parler de la comparaison de l'espace P avec les sphères; il serait presque plus naturel de considérer comme espace de comparaison, au lieu des sphères, les figures les plus simples possibles, les *simplexes*, et si on le fait on obtient vraiment un beau succès. Modifions tout d'abord un peu la notion d'une représentation « essentielle »: la représentation f d'un espace P sur un simplexe Q sera dite « relativement essentielle » s'il est impossible de libérer des points de Q du recouvrement par l'image de P en modifiant d'une manière continue f à l'intérieur seulement de Q , c'est-à-dire en ne modifiant f en aucun point dont l'image tombe sur la frontière de Q . Or voici l'énoncé d'un théorème de M. ALEXANDROFF: La dimension d'un espace compact P est le plus grand nombre n tel que P puisse être représenté relativement-essentiellement sur un simplexe à n dimensions [1; 2, p. 373; 19].

Par ce théorème aussi intuitif qu'important, je terminerai la partie de ma conférence traitant de la comparaison de deux espaces à l'aide de leurs représentations réciproques.

8. — Je parlerai maintenant des représentations d'un espace en lui-même. Déjà en considérant les *surfaces* finies, on remarque une relation entre ces représentations et la forme des surfaces: P étant une surface *close*, il est — d'après un théorème connu sur le degré de représentation — impossible de la *déformer*, d'une

¹ M. PONTRJAGIN a récemment répondu par la négative à cette question pour chaque $N = n + 2 > 4$. (Communication de M. LEFSCHETZ au Congrès intern. des Math., Oslo, sept. 1936.)

façon univoque et continue, en une de ses propres parties; par contre cela est possible si P admet une frontière. La propriété par laquelle se caractérisent ici les surfaces closes s'énonce sous la forme générale suivante: l'espace P sera dit « clos dans le sens de l'homotopie » ou encore « essentiel sur lui-même » si l'identité — c'est-à-dire la représentation avec $f(x) = x$ pour chaque point x de P — est une représentation essentielle.

Cette propriété d'être « clos » me semble une notion assez immédiate et naturelle. Si l'on considère par exemple un polyèdre P , alors se pose le problème de décider à partir des propriétés combinatoires de P , si P est « clos » dans ce sens ou ne l'est pas; mais ce problème n'est pas résolu, pas même pour les polyèdres; en particulier, il ne semble pas exister des relations simples entre le groupe fondamental et les groupes de Betti d'une part, et le fait d'être clos au sens de l'homotopie d'autre part [18; 2, p. 518 et suiv.].

Cependant, M. HUREWICZ a résolu un problème très voisin, à savoir: quels sont les polyèdres qui peuvent être réduits à *un seul point* par une déformation univoque et continue? La réponse est la suivante: une telle réduction du polyèdre connexe P est possible et ne l'est que si tous les r -ièmes groupes de Betti pour $r \geq 1$ ainsi que le groupe fondamental de P disparaissent, c'est-à-dire si P coïncide par les invariants classiques de Poincaré avec un simplexe [21]. C'est un théorème surprenant qui jette une vive lumière sur la valeur des invariants classiques et aussi sur celle de la nouvelle théorie de l'homotopie de M. HUREWICZ!

M^{lle} PANNWITZ et moi avons considéré avec succès une autre modification du problème non résolu de caractériser la propriété d'être clos: nous appelons un espace « labile » si des *déformations arbitrairement petites* suffisent pour le transformer en une de ses propres parties; un espace labile n'est donc, *a fortiori*, pas clos au sens de l'homotopie. Or, la labilité d'un polyèdre P qui est partout à n dimensions peut être caractérisée par une propriété purement combinatoire, à savoir par l'existence d'une « frontière » de P — où la notion de frontière employée ici appartient entièrement au domaine classique des notions sur lesquelles repose la théorie de l'homologie. Mais je ne voudrais pas insister ici sur la définition exacte de cette notion [18; 2, pp. 285 et 524].

Il est amusant et instructif de construire des exemples pour ces théorèmes; il existe notamment des polyèdres à deux dimensions qui peuvent être réduits à un point et qui sont labiles bien qu'ils ne possèdent pas d'arête libre, c'est-à-dire bien que, dans leurs décompositions en simplexes, chaque arête appartienne au moins à deux triangles [18].

9. — Parmi les propriétés des représentations d'un espace en lui-même, c'est l'existence ou la non-existence des *points fixes* qui a toujours retenu spécialement l'attention. Dans le cadre de notre mise en problèmes nous demanderons: quelles sont les propriétés de la forme d'un espace P qui permettent de décider si P peut ou non être transformé en lui-même sans points fixes? La circonférence est un tel espace, tandis que les simplexes contiennent, d'après le célèbre théorème de M. BROUWER, des points fixes pour toute représentation en eux-mêmes. De quelle façon pourrait-on généraliser cette différence entre une circonférence et un simplexe? Est-ce qu'un certain aspect « cyclique » d'une figure pourrait être caractéristique du fait qu'elle peut être transformée en elle-même sans points fixes? On a quelques connaissances sur ce sujet mais, malheureusement, elles ne sont pas bien nombreuses.

La formule sur les points fixes de M. LEFSCHETZ [26] est valable, comme je l'ai montré [12; 2, p. 524], non seulement pour des variétés mais aussi pour des polyèdres arbitraires; de cette formule découle le fait que le théorème précité de M. BROUWER sur les points fixes des simplexes se laisse étendre à tous les polyèdres qui ont les mêmes nombres de Betti que les simplexes, qui sont, de ce fait, connexes et dont tous les nombres de Betti de dimension positive disparaissent [2, p. 532]. M. LEFSCHETZ a montré, en outre, que ce théorème conserve sa validité si l'on remplace les polyèdres par les espaces compacts qui sont « localement connexes au sens de M. Alexander » [27, pp. 90 et 359]. La condition suivante est donc nécessaire pour l'existence de représentations en eux-mêmes sans points fixes de ces espaces assez généraux: pour un certain $r \geq 1$ le r -ième nombre de Betti est différent de zéro.

Un exemple, découvert par M. BORSUK, montrera qu'on n'ose

pas renoncer à l'hypothèse précitée de la connexité locale: il existe un continu dont tous les r -ièmes nombres de Betti pour $r = 1, 2, \dots$ disparaissent et qui peut cependant être transformé en lui-même sans point fixe [5]. D'ailleurs, ce continu se trouve bien dans l'espace à trois dimensions mais pas dans le plan et il est douteux qu'un tel exemple existe déjà dans le plan; en d'autres termes, nous ne savons pas — et cette ignorance est remarquable! — si l'affirmation suivante est exacte: P étant un continu plan ne décomposant pas le plan et f une représentation quelconque de P en lui-même, alors f possède un point fixe.

La condition qu'un nombre de Betti de dimension positive est différent de zéro n'est *pas suffisante* pour l'existence de représentations sans points fixes: par exemple, la variété à quatre dimensions des points complexes du plan projectif possède, pour toute représentation en elle-même un point fixe, bien que son deuxième et son quatrième nombre de Betti soient égaux à un [13]. C'est pour cette raison que les faits suivants, établis par M. BORSUK, sont très remarquables: tout polyèdre — et même, plus généralement, tout espace compact et localement connexe — dont le *premier* nombre de Betti ne s'annule pas peut être représenté en lui-même sans point fixe [4]; et la même affirmation est vraie aussi pour les polyèdres qui sont *situés dans l'espace euclidien à trois dimensions* et dont le *deuxième* nombre de Betti est différent de zéro [6]. Mais si nous considérons des polyèdres arbitraires, alors on ne connaît pas de critère nécessaire et suffisant pour l'existence de représentations sans points fixes et cela même pas si l'on se restreint aux variétés closes.

10. — On obtient cependant de meilleurs résultats si l'on ne considère pas des représentations arbitraires de P en lui-même, mais — comme dans le problème de la propriété d'être « clos » indiqué plus haut — des « petites transformations », c'est-à-dire des représentations où les distances entre le point et le point-image sont petites. En premier lieu, on déduit de la formule généralisée de M. LEFSCHETZ que nous venons d'employer, que seuls les polyèdres à *caractéristique eulérienne* nulle admettent des transformations arbitrairement petites sans point fixe

[2, p. 532]. Dans le cas des *variétés closes* la réciproque de cette affirmation est aussi vraie, le théorème suivant est donc valable: Une variété close admet et n'admet de transformation arbitrairement petite en elle-même sans point fixe que si sa caractéristique eulérienne est nulle [10; 2, p. 552]. On sait que cette condition est satisfaite pour toute variété de dimension impaire, tandis que parmi les variétés de dimension paire il n'y en a que quelques-unes qui la remplissent.

Dans une variété (dérivable ¹) la notion de « petite transformation sans point fixe » coïncide au fond avec la notion de « champ de directions »; nous pouvons donc énoncer pour les champs de directions le théorème formulé plus haut pour les petites transformations. On obtient alors une généralisation de théorèmes connus de POINCARÉ et de M. BROUWER sur des surfaces et des sphères à n dimensions.

11. — Le théorème sur l'existence de petites transformations sans point fixe joue un certain rôle dans les recherches sur les *variétés de groupes*: un espace de groupe admettant des transformations infinitésimales sans points fixes, sa caractéristique est de ce fait nécessairement nulle. La question de savoir quels espaces sont des espaces de groupes appartient en principe au cercle des problèmes que nous traitons ici; car, pour un espace, le fait de représenter un groupe est une propriété des transformations de l'espace sur lui-même, et seuls certains espaces la possèdent. Cependant, la théorie que nous exposa M. CARTAN dans sa conférence ne peut être appelée une théorie « topologique »; elle emploie en effet des moyens beaucoup plus difficiles et beaucoup plus profonds que ceux dont il a fallu se servir pour les problèmes dont j'ai parlé. La démonstration, par exemple, du théorème que, parmi toutes les sphères, seules celles de dimensions 1 et 3 sont des espaces de groupes, exige presque tout l'appareil moderne des théories de MM. CARTAN et WEYL. Ce serait une tâche extrêmement attrayante que de déduire le même fait par des moyens « élémentaires », c'est-à-dire purement topologiques. Nous sommes encore très loin de la résolution de

¹ Dès ici, les variétés que nous considérons doivent satisfaire à certaines conditions de dérivabilité que nous ne voulons d'ailleurs pas préciser.

ce problème; je voudrais cependant indiquer ici quelques nouveaux résultats de M. STIEFEL qui nous rapprochent, peut-être, de la solution de problèmes de cet ordre [28, 29].

On voit aisément qu'une variété de groupes à n dimensions admet non seulement *un* champ continu de directions, mais n champs de ce genre qui sont, en chaque point, linéairement indépendants; cette circonstance est équivalente au fait suivant: la variété est « *parallélisable* », c'est-à-dire que l'on peut introduire un « *parallélisme* » des directions, qui satisfait aux exigences naturelles imposées à une telle notion. La question subsiste de savoir si la possibilité de ce parallélisme découle déjà de l'existence d'un unique champ de directions, c'est-à-dire de la disparition de la caractéristique. M. STIEFEL a découvert le fait très surprenant que chaque variété orientable à trois dimensions est parallélisable; mais il pût montrer, d'autre part, par des exemples, qu'il faut répondre par la négation à la question que je viens d'énoncer; M. Stiefel démontre en particulier — dans le cadre de théorèmes plus généraux et plus précis — le fait suivant: Parmi les espaces projectifs réels à n dimensions pour lesquels on a $n + 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$, seuls les espaces des dimensions 1, 3, 7 sont parallélisables ¹. Cette même méthode n'a pas réussi jusqu'à présent en ce qui concerne le problème de la possibilité du parallélisme des sphères.

Il est donc démontré de façon purement topologique que, parmi tous les espaces projectifs, seuls ceux des dimensions $n = 1, 3, 7$ et $16k - 1$ avec $k = 1, 2, \dots$ peuvent éventuellement être envisagés comme des espaces de groupes. La théorie de M. CARTAN décide qu'ils doivent être éliminés tous à l'exception de $n = 1$ et $n = 3$. Nous ne savons pas encore s'il existe des espaces projectifs parallélisables pour $n = 16k - 1$; l'espace projectif à sept dimensions, comme d'ailleurs aussi la sphère à sept dimensions, sont parallélisables sans être cependant espaces de groupes. On ne sait pas s'il y a, en dehors de 7, encore un autre nombre de dimensions jouissant de cette propriété.

¹ M. EHRESMANN m'a indiqué dernièrement qu'il a fait, lui aussi, — dans un mémoire qui sera publié prochainement — des recherches sur la possibilité du parallélisme des espaces réels projectifs et qu'il a obtenu les mêmes résultats que M. Stiefel. Sa méthode, entièrement différente de celle de M. Stiefel, n'embrasse pas non plus les nombres de dimensions $n = 16k - 1$.

Le fait que voici est facile à montrer: pour une sphère S^n ainsi que pour un espace projectif P^n la possibilité de parallélisme est équivalente à l'existence d'un ensemble \mathfrak{F} de représentations topologiques de S^n ou P^n sur eux-mêmes, ensemble qui est simplement transitif pour un point (plus exactement: \mathfrak{F} est un ensemble de représentations topologiques de S^n ou P^n sur eux-mêmes et jouissant de la propriété suivante: il existe un point e tel que pour chaque point x il y ait dans \mathfrak{F} une et une seule représentation f_x avec $f_x(e) = x$; en plus, f_x dépend d'une manière continue de x et les f_x doivent avoir certaines propriétés de dérivabilité). L'existence d'un tel ensemble de représentations topologiques d'un espace est un affaiblissement de la propriété d'être espace de groupe; c'est même un affaiblissement considérable; la loi associative notamment ne joue pas de rôle ici. Malgré cela, les recherches sur les espaces de groupes « affaiblis » de cette façon — et peut-être encore d'autre façon — se révéleront utiles pour le maniement purement topologique des vrais espaces de groupes.

En tous cas, la question de savoir quelles sphères et quels espaces projectifs sont parallélisables me semble extrêmement intéressante. Les nombres les plus petits de dimensions pour lesquels cette question est encore ouverte, sont $n = 5$ dans le cas des sphères, $n = 15$ dans le cas des espaces projectifs. On devrait donc s'occuper notamment de S^5 et P^{15} . C'est un problème très particulier, mais je ne trouve pas qu'en mathématiques la « généralité » soit le seul critère pour la valeur d'un problème ou d'un théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ALEXANDROFF, Dimensionstheorie. *Math. Ann.*, 106 (1932), p. 161-238.
- [2] P. ALEXANDROFF und H. HOPF, *Topologie*, 1. Band (Berlin, J. Springer, 1935).
- [3] K. BORSUK, Über Schnitte der n -dimensionalen Euklidischen Räume. *Math. Ann.*, 106 (1932), p. 239-248.
- [4] — Über die Abbildungen der metrischen kompakten Räume auf die Kreislinie. *Fund. Math.*, 20 (1933), p. 224-231.
- [5] — Sur un continu acyclique qui se laisse transformer topologiquement en lui-même sans points invariants. *Fund. Math.*, 24 (1934), p. 51-58.
- [6] — Contribution à la topologie des polytopes. *Fund. Math.*, 25 (1935), p. 51-58.

- [7] N. BRUSCHLINSKY, Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3. *Math. Ann.*, 109 (1934), p. 525-537.
- [8] S. EILENBERG, Transformations continues en circonférence et la topologie du plan. *Fund. Math.*, 26 (1936), p. 61-112.
- [9] H. FREUDENTHAL, Die Hopfsche Gruppe. *Comp. Math.*, 2 (1935), p. 134-162.
- [10] H. HOPF, Vektorfelder in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 96 (1926), p. 225-250.
- [11] — Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Zweiter Teil. *Math. Ann.*, 102 (1929), p. 562-623.
- [12] — Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten. *Math. Zeitschrift*, 29 (1929), p. 493-524.
- [13] — Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. *Journ. f. d. r. u. a. Math.*, 163 (1930), p. 71-88.
- [14] — Über wesentliche und unwesentliche Abbildungen von Komplexen. *Recueil math. de Moscou*, 37 (1930), p. 53-62.
- [15] — Die Klassen der Abbildungen der n -dimensionalen Polyeder auf die n -dimensionale Sphäre. *Comm. math. Helv.*, 5 (1933), p. 39-54.
- [16] — Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Math. Ann.*, 104 (1931), p. 639-665.
- [17] — Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. *Fund. Math.*, 25 (1935), p. 427-440.
- [18] H. HOPF und E. PANWITZ, Über stetige Deformationen von Komplexen in sich. *Math. Ann.*, 108 (1933), p. 433-465.
- [19] W. HUREWICZ, Über Abbildungen topologischer Räume auf die n -dimensionale Sphäre. *Fund. Math.*, 24 (1935), p. 144-150.
- [20] — Beiträge zur Topologie der Deformationen. *Proc. Koninkl. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, 38 (1935), p. 112-119; p. 521-528; 39 (1936), p. 117-126; p. 215-224.
- [21] — Homotopie und Homologie. Conférence faite au Congrès des Topologues à Moscou en septembre 1935, paraîtra probablement dans le *Recueil math. de Moscou*.
- [22] H. KNESER, Die Topologie der Mannigfaltigkeiten. *Jahresber. Deutsche Math. Vereinig.*, 24 (1925), p. 1-14.
- [23] — Glättung von Flächenabbildungen. *Math. Ann.*, 100 (1928), p. 609-617.
- [24] — Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen. *Math. Ann.*, 103 (1930), p. 347-358.
- [25] C. KURATOWSKI et S. ULAM, Sur un coefficient lié aux transformations continues d'ensembles. *Fund. Math.*, 20 (1933), p. 244-253.
- [26] S. LEFSCHETZ, Intersections and transformations of complexes and manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 28 (1926), p. 1-49.
- [27] — *Topology* (New York, 1930).
- [28] E. STIEFEL, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Comm. Math. Helv.*, 8 (1936), p. 305-353.
- [29] — Ein Problem aus der linearen Algebra und seine topologische Behandlung. *Verhandl. d. Schweiz. Naturforsch. Gesellsch.*, 1935 (texte français dans *L'Ens. math.*, t. 34, p. 273-274).