et prenant pour γ, γ_1, ..., γ_n les dérivées partielles (du premier ordre) $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, ..., $\frac{\partial u}{\partial x_n}$. Le résultat ainsi obtenu doit être nul pour que S soit caractéristique. S'il en est ainsi, on a bien une exception au théorème fondamental; mais cette exception confirme, en un sens, la règle; car le problème qui consiste à trouver u et, tout d'abord, à en calculer les dérivées successives en chaque point de S est, en général impossible et, s'il n'est pas impossible, est nécessairement indéterminé, absolument comme il arrive pour un système de n équations du premier degré à n inconnues dont le déterminant est nul.

Ce cas mis à part, il faut encore observer que, comme pour les équations différentielles ordinaires, la solution n'est ainsi formée et son existence établie que *localement*, c'est-à-dire, dans le premier cas envisagé tout à l'heure, pour x inférieur à un certain nombre positif α et, dans le second, pour les points suffisamment voisins de S. On pourra d'ailleurs habituellement faire, mais seulement jusqu'à une certaine limite, que l'on ne peut même pas assigner *a priori*, le prolongement analytique de ce premier élément de solution, ainsi qu'il arrive pour les équations différentielles ordinaires.

II

Les contemporains de Cauchy et leurs successeurs immédiats ont considéré le résultat ainsi obtenu comme donnant une première réponse définitive à la question. On avait d'autant moins de raisons d'en douter qu'on avait l'exemple tout analogue des équations différentielles ordinaires. Une équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{4}$$

admet en général une solution et une seule correspondant à des *conditions initiales* données, savoir que pour $x = a$, y prenne une valeur numérique donnée b et $\frac{dy}{dx}$ une valeur numérique donnée b' (sauf pour certains systèmes exceptionnels de valeurs de a, b, b'). Mais par un phénomène curieux de véritable cécité psychique, une différence importante était passée inaperçue. Le théorème fondamental que nous venons de rappeler et qui est relatif à l'équation (4) admet, comme on sait, deux sortes de démonstrations très différentes. L'une repose sur un développement en série entière et sur un « Calcul des limites », ou, comme on dit aujourd'hui, la formation de séries majorantes; l'autre sur des approximations successives de tout autre nature (méthode de Cauchy-Lipschitz et méthode de M. Picard). Les géomètres de la fin du XIX^e^ siècle ne remarquaient pas qu'il y avait là non seulement deux espèces de démonstrations différentes, mais deux théorèmes différents, puisque, dans un cas, on supposait essentiellement le second membre de l'équation (4) analytique et holomorphe, défini, par conséquent, dans le champ complexe, au lieu qu'aucune hypothèse de cette nature n'est postulée dans la seconde catégorie de méthodes, où l'on peut se borner aux valeurs réelles des variables.

La démonstration de Sophie Kowalewski est l'analogue de la *première* méthode dont nous venons de parler: elle procède par séries entières et suppose essentiellement les données analytiques tant en ce qui concerne le second membre f de l'équation (1') qu'en ce qui concerne les données initiales g et h.

On a parfois tenté d'établir le même théorème par des méthodes analogues à celles de Cauchy-Lipschitz ou de M. Picard; et même des méthodes de cette espèce se sont montrées fécondes sous certaines conditions convenablement spécifiées. Dans le cas général, elles ont toujours échoué et, comme on va le voir, sont nécessairement vouées à l'échec.

III

Pendant que l'Analyse envisageait ainsi les données de Cauchy comme propres à définir une solution d'une équation telle que (1), un autre chapitre de la Science, à savoir l'étude des potentiels, c'est-à-dire de l'équation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (5)$$