

# VIII. — Conclusions.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

d'une variété à  $k$  dimensions. Le calcul précédent montre que cette aire est indépendante des coordonnées rectangulaires choisies et on verra facilement, généralisant les observations du § 83, que cette aire d'ordre  $k$  est définie par des conditions  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ .

On pourrait d'ailleurs reprendre tout le chapitre V; je n'insiste pas, *mon but ayant surtout été d'indiquer une méthode de définition de  $a_k$ , pour les domaines de l'espace à  $k$  dimensions, autre que celle des § 97 à 100.*

En terminant ce chapitre, je crois devoir rappeler qu'il serait tout à fait inadmissible, pédagogiquement, d'examiner directement avec des étudiants le cas général et de s'embarrasser ainsi d'indices; si je l'ai fait, c'était pour abréger et montrer cependant qu'on oublie trop volontiers certaines précautions indispensables comme de spécifier la famille de domaines envisagés, ou qu'on admet, comme évidents et clairs pour  $n$  dimensions, des faits auxquels on est habitué lorsqu'il n'y a que 2 ou 3 dimensions.

### VIII. — CONCLUSIONS.

Les chapitres qui précèdent n'ont besoin d'aucune conclusion scientifique, ni pédagogique. Ils ne visent nullement à figer l'enseignement en signalant certains exposés comme meilleurs que les autres; ils s'efforcent, au contraire, de montrer le fort et le faible de chaque façon de présenter les faits mathématiques. S'il a semblé utile de développer davantage les procédés moins connus, cela ne veut nullement dire qu'ils doivent être préférés. En signalant certains défauts, erreurs, lacunes des exposés classiques, je n'ai jamais prétendu les condamner, je voudrais, au contraire, contribuer à les améliorer. Ceci ne peut être obtenu, à mon avis, que par une étude comparative critique des divers modes d'exposition; j'ai essayé de faire cette étude en ce qui concerne la mesure des grandeurs.

Et si de telles études sont bien, comme je le pense, indispensables au progrès pédagogique, si elles sont nécessaires pour bien choisir ce que l'on doit dire et bien savoir pourquoi on le dit, elles

sont donc un excellent exercice pédagogique qui devrait être exigé des futurs professeurs.

J'ai déjà dit cela au début; si j'y reviens ici, c'est qu'il me sera maintenant possible de mieux expliquer en quoi l'effort que je voudrais voir demander aux aspirants professeurs diffère de celui qu'on leur demande actuellement et qu'il ne vise à leur faire acquérir ni une habileté technique plus grande, ni des connaissances philosophiques.

D'ordinaire, dès qu'il s'agit des fondements des mathématiques, on adopte le point de vue philosophique; je m'y suis refusé délibérément et certains ont vu dans cette attitude la marque d'un mépris envers la philosophie.

Non; mon bon maître, Jules Tannery, disait: « Il est prudent de respecter, au moins provisoirement, ce que l'on ignore ». D'autre part, si ignorant que je sois, je n'oublie pas que c'est parce que des philosophes ont longuement médité sur des problèmes, si difficiles qu'on ne peut même les formuler, qu'ils sont parvenus à en isoler des questions plus simples: celles dont s'occupent les sciences.

Nous devons respecter la philosophie; il ne s'ensuit pourtant pas qu'elle puisse nous aider ni à comprendre mieux nos sciences, ni à les faire progresser. C'est un fait que les sciences se sont développées surtout quand elles ont pris conscience de leur individualité et se sont séparées de la philosophie.

Que les philosophes recherchent si quelque méthode, ayant fait ses preuves dans le domaine scientifique, ne pourrait pas leur être utile, cela est naturel et raisonnable; c'est aller du facile au difficile. Mais que les mathématiques, qui étudient des questions si simples qu'on peut en donner des solutions précises et définitives, aillent demander des ressources à la philosophie, qui doit se contenter de réponses imprécises et précaires, je n'ai pu l'admettre.

D'ailleurs, les problèmes philosophiques ont été, depuis des siècles, retournés en tous sens par des hommes dont certains ont eu du génie; n'y aurait-il pas, de la part d'un mathématicien qui se croirait autorisé à apporter ses solutions philosophiques parce qu'il aurait consacré quelques loisirs à des réflexions, une prétention insupportable et naïve tout à la fois? En avouant

franchement mon incompetence, je crois faire preuve, envers la philosophie, d'un respect autrement sincère.

A mon avis, le mathématicien, en tant que mathématicien, n'a pas à se préoccuper de philosophie; opinion qui, d'ailleurs, a été formulée par bien des philosophes. Ses efforts de réflexion, de compréhension doivent être en quelque sorte intérieurs aux mathématiques au lieu de porter sur les rapports de celles-ci avec la philosophie. Certes, les questions dont il a à s'occuper n'ont ni le même genre de beauté, ni le poignant intérêt humain des problèmes philosophiques; pourtant, si l'on parvenait à édifier une philosophie de la science pour la science, cette philosophie de seconde zone serait peut-être l'aide la plus efficace pour la vraie philosophie.

Le professeur de mathématiques doit, lui aussi, savoir borner le domaine de son activité à ce qui est objectif; il est chargé de culture scientifique, son collègue de philosophie est seul chargé de la culture philosophique.

En s'occupant ainsi seulement de ce qui est en quelque sorte matériel, manuel, on fait nécessairement des mathématiques une des branches de la physique. Branche qui toutefois se différencie des autres en ce qu'on n'y fait appel à l'observation qu'au début, pour acquérir définitions et axiomes. Lorsqu'un mathématicien a prévu plus ou moins nettement une proposition, au lieu d'avoir recours à l'expérience, comme le ferait un physicien, il cherche une démonstration logique; la vérification logique remplace pour lui la vérification expérimentale. En somme, il ne cherche pas à découvrir du nouveau, il essaie de prendre conscience des richesses qu'il possède déjà inconsciemment, qui sont enfermées dans les définitions et dans les axiomes. D'où l'importance capitale de ces définitions et axiomes qui, certes, ne sont assujettis logiquement qu'à la condition d'être compatibles, mais qui ne conduiraient qu'à une science purement formelle, vide de sens, s'ils étaient sans rapport avec la réalité.

Le professeur de mathématiques, celui de l'Enseignement secondaire en particulier, n'a pas à former de purs logiciens, il doit contribuer à façonner des hommes raisonnables et pour cela il lui faut s'occuper non seulement des raisonnements logiques mais encore de l'acquisition des prémisses de ces raisonnements

et de l'application de leurs résultats au concret. Dans les questions traitées ici je n'ai guère eu l'occasion de parler de ce dernier point; il n'en est pas moins essentiel. Faute de bien indiquer le départ du concret et le retour au concret on risquerait de faire acquérir aux élèves l'esprit géométrique dans le sens péjoratif du terme, de les inciter à raisonner impertubablement à partir de données non assurées. Il faut faire concevoir aux élèves qu'en dehors des mathématiques on ne démontre rien mathématiquement et que, pourtant, la logique est utile en toutes circonstances. Les mathématiques ont été créées par les hommes pour leurs besoins et elles leur sont, en fait, un auxiliaire précieux; le professeur de mathématiques doit rester un professeur d'action. Il ne lui appartient pas d'éveiller le doute philosophique, car il n'aurait pas, comme son collègue de philosophie, le temps et les moyens de l'éveiller et de le discipliner tout à la fois.

Je ne crois pas que ce soit assez d'exiger que les futurs professeurs aient acquis une habileté technique et qu'ils sachent débiter des manuels; il faudrait leur avoir demandé de réfléchir longuement à ce qu'ils auront à enseigner dans un esprit de critique logique et pédagogique; d'avoir fait, seuls ou aidés par quelque enseignement, sur chaque grand chapitre, une étude analogue à celle que j'ai indiquée ici pour ce qui concerne la mesure des grandeurs.

Quels enseignements de futurs professeurs pourraient-ils tirer de cette étude? Il est certain tout d'abord que pour choisir en connaissance de cause entre les divers exposés des faits mathématiques il faut les avoir comparés, en avoir cherché le fort et le faible. Que, ce faisant, on se met en mesure d'en construire de nouveaux, si besoin est. Tout cela est trop clair, passons à des bénéfices plus cachés. En scrutant les raisonnements, si l'on voit toute la puissance de la logique, on aperçoit aussi toutes ses exigences et l'on prend conscience des précautions indispensables dans les mathématiques appliquées.

Dans chaque chapitre, j'aurais pu répéter ce que j'ai dit pour l'arithmétique, § 3: ce chapitre s'applique quand il s'applique. Nos raisonnements absolus ne nous conduisent, dans les applications, qu'à des vérités relatives. C'est qu'il y a toujours quelque désaccord entre nos prémisses logiques et la réalité qu'elles pré-

tendent traduire. Par exemple, nous avons rencontré la vieille question des irrationnelles: les Anciens avaient construit, à l'aide des fractions, un continu parfaitement suffisant pour toutes les expériences humaines, quelque précision qu'elles puissent atteindre, mais insuffisant logiquement. Il nous a fallu (§§ 7, 55) prolonger métaphysiquement la suite des opérations de mesure pour obtenir la notion sur laquelle nous pouvons raisonner logiquement. Pour étudier le concret, ou ce qui nous paraît être tel, il nous a fallu procéder à un élargissement du réel.

Dans le cas de la notion d'aire, le procédé employé est en quelque sorte inverse de celui, relatif à la longueur, que je viens de rappeler. Pour donner à l'aire une base logique, nous nous sommes bornés à des domaines spéciaux: les domaines quarrables. Bien entendu, dans un enseignement s'adressant à de futurs professeurs on aurait donné, par des exemples, la preuve de l'existence de ces domaines non quarrables qui, ici, a été considérée seulement comme possible. Ainsi, on verrait un domaine  $D$  tel que, si petit que soit  $\varepsilon > 0$ , on puisse trouver deux polygones différant l'un de l'autre, et de  $D$ , de moins de  $\varepsilon$  et dont les aires diffèrent de plus d'un nombre positif déterminé. La notion physique d'aire s'écroule en quelque sorte, nous avons renoncé à lui donner dans tous les cas un sens logique; pour redonner une aire à  $D$  il faudrait procéder à un nouvel élargissement de la notion de nombre comme on l'avait fait pour redonner une longueur à la diagonale du carré construit sur l'unité de longueur et cet élargissement nous paraîtrait tout d'abord inadmissible et scandaleux.

Ces constatations rappelleraient aux élèves-professeurs que les efforts des mathématiciens ont été faits, tout d'abord au moins, en vue du réel et les inciteraient à oser en parler. Elles leur montreraient aussi toutes les ressources que la logique fournit à l'intelligence et que, sans l'intelligence, la logique ne conduit qu'à des déconvenues.

Un professeur de physique ne se croit pas tenu, par respect de l'expérience, à cacher l'intervention de l'intelligence dans les recherches physiques. Trop de professeurs de mathématiques se croient tenus, par respect de la logique, à présenter les mathématiques comme le déroulement inéluctable d'une déduction à voie

unique. Si quelques noms de mathématiciens n'étaient accolés, à tort ou à raison, à certains théorèmes, les élèves pourraient oublier que les mathématiques ne sont qu'œuvre humaine. On ne parle jamais du choix des prémisses, on n'ose pas dire que telle proposition a été obtenue grâce aux qualités d'*imagination* d'un savant; on confond avec la découverte d'une proposition sa présentation logique faite à la mode actuelle. A entendre certains professeurs, on croirait que Newton n'a rien compris à l'intégration, que Euler ignorait les séries, que Lagrange ne savait pas ce qu'était une fonction. On cherche partout des démonstrations naturelles — on m'a parlé de quelqu'un qui se félicitait d'avoir enfin trouvé, après six mois de recherches, une démonstration naturelle du fait que les trois hauteurs d'un triangle concourent! — et l'on croit, grâce à ces démonstrations naturelles, enseigner l'art de découvrir.

S'il était vrai que la méthode de la redécouverte soit la véritable méthode de découverte, ça se saurait; car nous serions noyés sous les découvertes des innombrables protagonistes de la redécouverte. Mais, tout au contraire, un enseignement basé trop systématiquement sur la redécouverte serait l'enseignement même de la non découverte car, pour découvrir, il faut faire un rapprochement inhabituel, *non naturel*, et la méthode de la redécouverte consiste à guider les élèves vers certains raisonnements catalogués, toujours les mêmes, et à apprendre aux élèves à les essayer successivement, sans omission. Cela permet, certes, de résoudre les problèmes parce qu'on propose des problèmes justiciables des raisonnements en question; mais cette taylorisation du travail intellectuel, ce dressage, est tout différent, est tout le contraire de l'assouplissement qui permet à l'intelligence de découvrir de nouveaux points de vue.

La méthode de la redécouverte est d'ailleurs excellente; elle a joué le rôle principal dans cette transformation de l'enseignement des mathématiques dans les lycées qui a remplacé les classes mornes d'autrefois, où les élèves n'avaient qu'un rôle réceptif, par les classes vivantes de maintenant où les élèves, ayant un rôle actif, sentent mieux la signification, la portée, l'intérêt, le but des propositions. Il est excellent aussi d'employer des démonstrations montrant la parenté du raisonnement

utilisé avec les raisonnements familiers aux élèves, démonstrations que l'on appelle naturelles pour cette raison; en concevant qu'on ait pu construire ces démonstrations, les élèves les comprennent mieux et prennent confiance en leurs propres moyens. Mais il ne faut pas demander à la redécouverte et aux démonstrations naturelles ce qu'elles ne peuvent donner. Ce sont d'excellents moyens pédagogiques; rien de plus. Et ces moyens deviendraient néfastes s'ils servaient à masquer le rôle de l'intelligence, à suggérer que faire des mathématiques c'est appliquer à la lettre des sortes de règlements.

Voici quelques questions auxquelles on pense nécessairement au cours d'une étude critique comme celle faite ici. Peu m'importe d'ailleurs que les élèves-professeurs arrivent aux conclusions que je viens de formuler ou à d'autres; mais je voudrais qu'ils aient, sur des points aussi fondamentaux, une opinion réfléchie.

Je viens de parler d'étude critique mais, en vérité, avons-nous fait quelque chose qui mérite le nom de critique quand, par exemple, parlant du nombre entier, nous nous sommes bornés à décrire l'opération de dénombrement. N'aurions-nous pas dû examiner la notion d'objets, de corps à dénombrer? Nous n'avons signalé que l'arbitraire de cette notion et cela nous a conduit, § 10, à la multiplication; il y a bien plus à dire. La notion de corps n'est claire que pour qui ne la critique pas; la physique la détruit peu à peu. On sait depuis toujours que le corps solide le mieux poli a des anfractuosités, des pores, que, dans des cavités ou dans sa matière même, sont inclus d'autres corps, des impuretés, des liquides, des gaz; puis on a su que tout solide baigne dans une atmosphère formée de sa vapeur et sans cesse variable; puis les théories atomiques des corps, les théories planétaires des atomes rendent la notion de corps de plus en plus incertaine. La division en corps, est-elle autre chose qu'une construction simpliste du monde à l'aide d'images de notre moi, la seule chose dont nos ancêtres primitifs avaient un peu nettement conscience? Si la notion de corps n'a aucune valeur absolue, celle d'entier, même celle du nombre *un*, n'est-elle pas la plus fautive de toutes les notions? Et que dire alors de la notion de nombre en général que nous n'avons atteinte

qu'en remplaçant la notion vague de corps par celle plus insaisissable de point ?

Il est clair que je suis dans une mauvaise voie, que je n'ai fait que jeter le doute le plus stérile en cherchant de l'absolu alors que j'étais dans le domaine du relatif et du nuancé, qu'une véritable étude critique de la notion de corps serait intimement liée à l'examen des démarches de notre pensée s'efforçant de comprendre le monde extérieur et nous ferait sortir du domaine des mathématiques. En disant cela, je n'interdis pas d'aller jusqu'à la critique philosophique dont l'intérêt et l'importance ne sont nullement mis en question, mais il faudrait pouvoir y consacrer bien du temps pour le faire utilement et y avoir été préparé par des études antérieures. A côté de cette critique, il en existe une autre plus à la portée des mathématiciens; c'est celle que j'ai appelée la critique logique et pédagogique et dont je tenais à signaler la différence avec la critique proprement philosophique.

Des travaux importants bien connus ont montré l'intérêt de l'étude approfondie des mathématiques élémentaires soit en vue de leurs prolongements vers d'autres branches des mathématiques, soit en vue de la philosophie ou de l'histoire des sciences; j'attire l'attention sur son intérêt pédagogique.

---